



KERNFORSCHUNGSANLAGE JÜLICH GmbH

Institut für Nukleare Sicherheitsforschung

**Zur Berechnung von
Kriechverformungen und Spannungen
in dickwandigen Rohren**

von

Gerd Breitbach

Steffi Kragl

Manfred Roedig

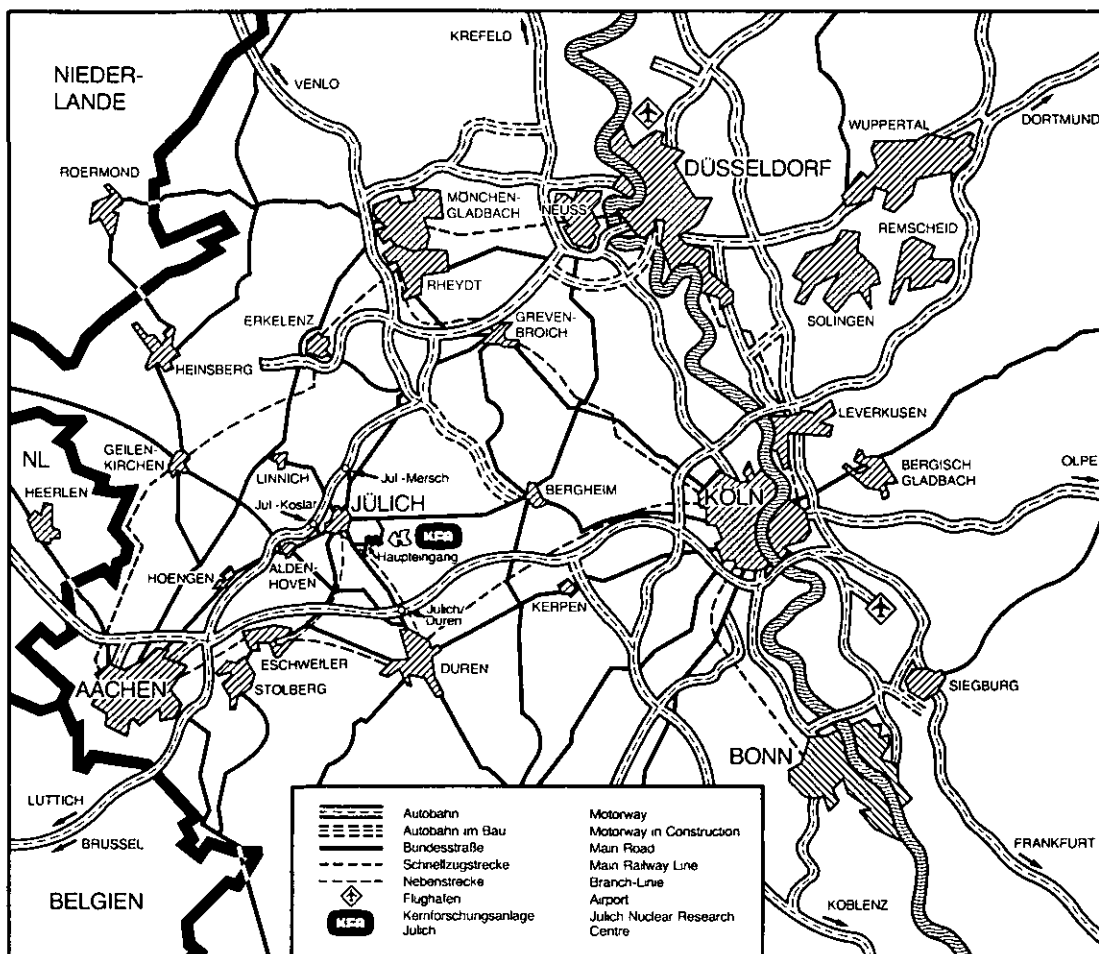
Heinz-Josef Penkalla

Jül - Spez - 373

September 1986

ISSN 0343-7639

eingefügt



Als Manuskript gedruckt

Spezielle Berichte der Kernforschungsanlage Jülich – Nr. 373

Institut für Nukleare Sicherheitsforschung Jül - Spez - 373

Zu beziehen durch: ZENTRALBIBLIOTHEK der Kernforschungsanlage Jülich GmbH

Postfach 1913 · D-5170 Jülich (Bundesrepublik Deutschland)

Telefon: 024 61/610 · Telex: 833 556-0 kf d

Zur Berechnung von Kriechverformungen und Spannungen in dickwandigen Rohren

von

Gerd Breitbach

Steffi Kragl

Manfred Roedig

Heinz-Josef Penkalla

CALCULATION OF CREEP DEFORMATIONS
AND STRESSES IN THICKWALLED TUBES

von

G. Breitbach
S. Kragl
M. Roedig
H.J. Penkalla

SUMMARY

Heat Exchangers for methan reforming processes installed in Helium cooled High Temperature Reactors suffer temperatures in the range 800-950 °C. At such high temperatures in metallic structures Creep is an important phenomenon.

For thick walled tubes exposed to pressure and to pressure independent axial forces calculation methods to determine stresses and creep deformations are developed Norton's creep law is used as the constitutive equation. One of the calculation schemes is based without simplifications on the governing equations of continuum mechanics, the other is an approximate method.

For a series of examples the results of the two calculation schemes are compared and discussed.

ZUR BERECHNUNG VON KRIECHVER-
FORMUNGEN UND SPANNUNGEN IN
DICKWANDIGEN ROHREN

von

G. Breitbach
S. Kragl
M. Roedig
H.J. Penkalla

KURZFASSUNG

Wärmetauscher für Methanreformierungsprozesse, die in einem heliumgekühlten Hochtemperaturreaktor eingesetzt werden, erfahren Temperaturen, die 800-950 °C betragen können. Bei diesen Temperaturen spielen Kriechprozesse in metallischen Strukturen eine bedeutende Rolle.

Für dickwandige Rohre, die Druckbelastungen und zusätzlich aufgeprägten Axiallasten ausgesetzt sind, werden Berechnungsverfahren zur Ermittlung von Spannungen und Kriechverformungen dargestellt. Als Stoffgleichung wird dabei ein Norton'sches Kriechgesetz zugrunde gelegt. Bei den Berechnungsverfahren handelt es sich sowohl um die exakte kontinuumsmechanische Methode als auch um ein Näherungsverfahren.

Für eine Reihe durchgeführter Beispielrechnungen werden die Ergebnisse beider Verfahren verglichen und diskutiert.

INHALTSVERZEICHNIS

1. EINLEITUNG; PROBLEMSTELLUNG
2. STOFFGESETZE ZUR BESCHREIBUNG VON KRIECHVORGÄNGEN
3. KRIECHVERFORMUNGEN UND SPANNUNGSVERTEILUNGEN IN DICKWANDIGEN ROHREN
 - 3.1 Grundgleichungen
 - 3.2 Auflösung der Gleichungen
 - 3.2.1 Der Verformungszustand ohne Verlängerung in axiale Richtung
 - 3.2.2 Das dickwandige Rohr unter reiner axialer Zugbelastung
 - 3.2.3 Beispiele numerischer Untersuchungen an dickwandigen Rohren unter Innendruck und axialem Zug
4. NÄHERUNGSVERFAHREN ZUR BERECHNUNG VON SPANNUNGEN UND KRIECHVERFORMUNGEN
 - 4.1 Die Behandlung großer Verformungen
 - 4.1.1 Analytische Behandlung der Fälle 'reine Zugbelastung' und 'reiner Innendruck' mit der Näherungsmethode
 - 4.1.2 Numerische Auswertung mit dem Euler-Cauchy-Verfahren
 - 4.1.3 Numerische Auswertung mit dem Runge-Kutta-Verfahren
 - 4.2 Beispiele numerischer Untersuchungen mittels des Näherungsverfahrens
5. SCHLUSSBEMERKUNGEN

1. EINLEITUNG, PROBLEMSTELLUNG

Der heliumgekühlte Hochtemperaturreaktor vermag Wärme auf einem Temperaturniveau von nahezu 1000 °C zu produzieren. Er kann damit in Prozeßwärmeanlagen zur Methanreformierung eingesetzt werden /1/. Die Rohre der wärmetauschenden Aggregate erfahren dabei in den heißesten Bereichen Temperaturen, die 800-950 °C betragen können. Ein typisches Tauchrohr eines Prozeßwärmetauschers ist in Abb. 1 gezeigt. Bei einer Länge von etwa 13 m hat es einen inneren Durchmesser von 100 mm und eine Wandstärke von 10 mm.

Während des bestimmungsgemäßen Betriebs wirken nur wenige bar Druckdifferenz über die Wandstärke (~ 42 bar Innendruck, ~ 39 bar Außendruck), aber im Zusammenhang mit Druckentlastungsvorgängen des Primärkreislaufs ist die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, daß das volle Innendruckniveau in den heißen Rohren zur Wirkung kommt. Bei den herrschenden hohen Temperaturen kann es dann in den Rohrwandungen zu progressiven inelastischen Verformungen (Kriechen) kommen, die in Auslegungs- und Sicherheitsbetrachtungen einbezogen werden müssen.

Dickwandige Rohre, wie hier bei der Methanreformierung, sind zwar geometrisch recht einfach beschreibbare Gebilde, bei Belastung aber - etwa durch Innendruck - resultieren in den Wandungen komplexe dreiachsige Spannungszustände, zu deren Berechnung wegen der statischen Unbestimmtheit ein nicht unerheblicher mathematischer Aufwand zu treiben ist. Das gilt selbst für den einfachsten Fall einer elastischen Rechnung, bei der Spannungen und Verzerrungen linear miteinander verknüpft sind.

Bei Auftreten inelastischer Effekte gehen die Spannungs-Verformungsanalysen um einiges über das hinaus, was man im Rahmen elastischer Nachweise durchzuführen pflegt. Es sind vor allem nichtlineares Geometrie-/Materialverhalten und unter Umständen die Zeitabhängigkeit, die einen hohen rechentechnischen Aufwand erfordern.

Von daher stellt sich die Frage nach Näherungsverfahren für inelastische Analysen, die einerseits hinreichend genau und andererseits gut durchschaubar sind.

Im Verlauf dieser Arbeit werden die folgenden Punkte behandelt:

- Ein Stoffgesetz zur Beschreibung des Kriechens unter Berücksichtigung elastischer Effekte wird angegeben. Es wird diskutiert, was bezüglich des Stoffgesetzes zu beachten ist, wenn man von der Voraussetzung kleiner bzw. 'infinitesimaler' Verformungen abgeht und große, die ursprüngliche Geometrie merklich verändernde Verformungen zulassen will.
- Für ein dickwandiges Rohr unter Innen-, Außendruck und überlagerter Axialkraft werden im allgemeinen Fall großer Verformungen die Basisgleichungen (Kinematik, Kräftegleichgewicht, Stoffgesetz) formuliert. Das Rohrmaterial ist dabei durch ein einfach strukturiertes Stoffgesetz charakterisiert (nichtlineares Norton-Typ-Kriechen ohne Berücksichtigung elastischer Effekte).

Die Basisgleichungen werden analytisch soweit wie möglich aufbereitet. Sodann wird gezeigt, wo und wie man numerische Verfahren einzusetzen hat. Die fortschreitenden Verformungen unter den gegebenen Belastungen werden in der jeweils aktuellen geometrischen Konfiguration in einem räumlichen Koordinatensystem beschrieben und verfolgt (Euler'scher Standpunkt, im Gegensatz zum Lagrange'schen Standpunkt, bei dem stets auf Koordinaten bzw. die durch sie charakterisierten Massepunkte der unverformten Struktur Bezug genommen wird).

- Es werden die vergleichsweise einfachen Näherungsgleichungen angegeben, bei denen die Rohre als 'dünnwandig' angesehen werden (Stichwort 'Kesselformel'). Hier hat man es nun mit einem statisch bestimmten System zu tun, was die Rechnungen ungeheuer vereinfacht, weil die jeweils aktuellen Spannungen als 'mittlere' Spannungen über die Rohrwandung aus den äußeren Lasten allein ermittelt werden können. Die Verformungsgrößen können dann aus dem Spannungszustand explizit in einer Nachlaufrechnung errechnet werden.
- Exaktes Verfahren und Näherung werden eingesetzt, um das Spannungs-Verformungsverhalten eines Rohres (Innendurchmesser 100 mm, Wandstärke 10 mm) unter verschiedenen Kombinationen

von Innendruck und zusätzlich überlagertem axialen Zug zu berechnen. Die Lasten sind dabei so eingestellt, daß innerhalb der Rohrwandung eine Vergleichsspannung von etwa 25 N/mm^2 herrscht. Die verwendeten Stoffgesetzparameter sind Werte, die in /2/ als Meßwerte einer Stabmaterialcharge aus INCOLOY 800 H bei 950°C angegeben sind.

2. STOFFGESETZ ZUR BESCHREIBUNG VON KRIECHVORGÄNGEN

Bei hohen Temperaturen spielen Kriechprozesse in belasteten Strukturen eine bedeutende Rolle. Im Gegensatz zu den 'klassischen' plastischen Verformungen laufen Kriechverformungen in der Zeit ab, sie vergrößern sich auch bei konstant gehaltenen Lasten.

Einaxiale Zugversuche an Hochtemperaturlegierungen zeigen, daß das relativ einfach strukturierte Norton'sche Kriechgesetz $\dot{\epsilon}_{\text{Cr}} = k \cdot \sigma^n$ ¹⁾ eine geeignete Relation zwischen der Kriechdehnrate $\dot{\epsilon}_{\text{Cr}}$ und der Spannung σ darstellt. Nun zeigen aber selbst bei höchsten Temperaturen Metalle noch in gewissem Umfang elastische Reaktionen, so daß die gesamte Dehnrate $\dot{\epsilon}$ durch elastische Effekte beeinflusst wird. Demzufolge setzt sich die Gesamtdehnrate $\dot{\epsilon}$ additiv aus einem elastischen Beitrag, der die Zeitableitung der Spannung enthält, und der Kriechdehnrate $\dot{\epsilon}_{\text{Cr}}$ zusammen:

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_{\text{el}} + \dot{\epsilon}_{\text{Cr}} = \frac{1}{E} \cdot \dot{\sigma} + k \cdot \sigma^n \quad (2-1)$$

Aus (2-1) folgt, daß im Falle $\dot{\sigma} = 0$, dem sogenannten stationären Kriechen, die Gesamtdehnrate nur durch Kriechprozesse bestimmt ist. In der Literatur ist ausführlich beschrieben, wie man die einaxiale Formulierung (2-1) auf mehraxiale Zustände überträgt (z.B. /3/, /4/). Dabei geht man üblicherweise von isotropem Materialverhalten aus.

Der typische einaxiale Zugversuch liefert allerdings keine hinreichenden Informationen, um eine eindeutige Übertragung durchzuführen. Wenn darüber hinaus keine weiteren Materialversuche vorliegen, nimmt man nach einem Vorgehen von Odquist /3/ an, daß Kriechverformungen inkompressibel sind, und daß die Intensität

¹⁾ () bedeutet Zeitableitung $\frac{d}{dt}$

des Kriechens im wesentlichen von der 2. Invarianten des Spannungstensors (bzw. der v. Mises Vergleichsspannung) abhängt. Eine Verallgemeinerung der Übertragung, die allerdings zusätzliche Experimente erfordert, ist in /5/ diskutiert.

Aus dem Odquist'schen Vorgehen resultiert die folgende allgemeine tensorielle Formulierung des Stoffgesetzes, das Elastizität und Kriechen gemäß einem Norton'schen Ansatz verknüpft. Anstelle der Spannung σ_{ij} verwendet man üblicherweise den Spannungsdeviator S_{ij} in der Stoffgleichung

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \cdot \dot{S}_{ij} + \frac{1-2\nu}{E} \cdot \dot{S} \cdot \delta_{ij} + \frac{3}{2} \cdot k \cdot \sigma_e^{n-1} \cdot S_{ij} \quad (2-2)$$

Hierbei bezeichnen

$S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \cdot S$ = Komponenten des Spannungsdeviators bezogen auf ein kartesisches Koordinatensystem (x_1, x_2, x_3) , Indices $i, j = 1, 2, 3$

σ_{ij} = Komponenten des Spannungstensors

δ_{ij} = Kroneckersymbol = $\begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

$S = \frac{1}{3} \cdot \sum_{k=1}^3 \sigma_{kk}$ = mittlere Normalspannung

$\sigma_e^2 = \frac{3}{2} \cdot \sum_{k=1}^3 (S_{ij} \cdot S_{ij})$ = von Mises Vergleichsspannung

$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i} \right)$ = Komponenten der Verzerrungsgeschwindigkeit.

Die Verzerrungsgeschwindigkeit wird auf ein momentanes Geschwindigkeitsfeld $(\dot{u}_1, \dot{u}_2, \dot{u}_3)$ innerhalb der sich verformenden Struktur zurückgeführt, wobei die u_i die Komponenten des Verschiebungsvektors darstellen. In der Gleichung (2-2) beschreiben die beiden ersten Terme die elastischen Effekte (charakterisiert durch den E-Modul E und die Querkontraktionszahl ν), während der dritte Term die mehraxiale Form der Kriechverzerrungsgeschwindigkeit darstellt.

Greift man bei der Formulierung des Stoffgesetzes auf die Spannungen selbst (statt auf deviatorsche Größen) zurück, so schreibt sich (2-2):

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \sum_{k,l=1}^3 \left(H_{ijkl} \cdot \dot{\sigma}_{kl} + C_{ijkl} \cdot \sigma_{kl} \right) \quad (2-3)$$

mit $H_{ijkl} = \frac{1}{2} \frac{1+\nu}{E} \cdot (\delta_{ik} \cdot \delta_{jl} + \delta_{il} \cdot \delta_{kj}) - \frac{\nu}{E} \cdot \delta_{ij} \cdot \delta_{kl}$

und $C_{ijkl} = \frac{3}{4} \cdot k \cdot \sigma_e^{n-1} \cdot (\delta_{ik} \cdot \delta_{jl} + \delta_{il} \cdot \delta_{kj}) - \frac{1}{2} \cdot k \cdot \sigma_e^{n-1} \cdot \delta_{ij} \cdot \delta_{kl}$

Die Beziehung (2-2) oder (2-3) ist am einfachsten handhabbar, wenn Verformungen hinreichend klein ('infinitesimal') bleiben. In diesen Fällen ist es nicht notwendig, in den Gleichungen des Kräftegleichgewichts zwischen den Koordinaten eines Materialpunktes im unverformten und im verformten Zustand zu unterscheiden. Die Gleichgewichtsbedingung kann mit ausreichender Genauigkeit im unverformten Körper zur Anwendung gebracht werden. Ebenfalls können die Spannungen problemlos in der unbelasteten Konfiguration interpretiert werden. Die mit einem überschriebenen Punkt gekennzeichnete Zeitableitung ist in diesem Fall schlicht eine partielle Ableitung bei festgehaltenen Koordinaten x_1, x_2, x_3 .

Wenn große Verformungen berücksichtigt werden müssen, wird es notwendig, zwischen unverformter und verformter Konfigurationen zu unterscheiden. Das erfordert von seiten der Kinematik her eine Neufassung des Verzerrungs- bzw. Verzerrungsgeschwindigkeitsbegriffs. Vor allem ist es wichtig - im Unterschied zu 'infinitesimalen' Verformungen - zwischen den Koordinaten eines Materialpunktes in verschiedenen Stadien des Verformungsvorganges zu unterscheiden. In den einschlägigen Lehrbüchern (z.B. /6/, /7/, /8/, /9/, /10/) wird die Kinematik großer Verformungen ausführlich behandelt.

Eine vertiefte Beschäftigung mit den kinematischen Grundlagen zeigt, daß die durch $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ definierten Größen bei großen Verformungen im allgemeinen nicht mehr zur Charakterisierung des Verzerrungszustandes sinnvoll sind. Wohl hat es noch Sinn, von einem momentanen Geschwindigkeitsfeld - jetzt als v_i statt \dot{u}_i bezeichnet - zu sprechen sowie von den Komponenten einer momentanen Verzerrungsgeschwindigkeit - jetzt als

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \text{ statt } \dot{\epsilon}_{ij} \text{ bezeichnet - .}$$

Was die Stoffgleichungen anbetrifft, bedürfen die durch einen überschriebenen Punkt bezeichneten Zeitableitungen, die im Falle kleiner Verformungen als partielle Ableitungen interpretiert

werden konnten, im Zusammenhang mit großen Verformungen einer Präzisierung. So sind die zeitlichen Ableitungen der Spannungstensorkomponenten an einem vorgegebenen Materialpunkt bei einem fest vorgegebenen räumlichen Koordinatensystem keine Komponenten eines dem Objektivitätskriterium genügenden Tensors /7/. Ein in einem Stoffgesetz verwendeter Tensor genügt dabei dem Objektivitätskriterium, wenn er sich auch bezüglich gegeneinander rotierender Koordinatensysteme als Tensor erweist.

Von daher ist der Begriff der zeitlichen Ableitung des Spannungszustandes - auch als 'Spannungsgeschwindigkeit' bezeichnet - neu zu fassen. Es zeigt sich, daß es mehrere Möglichkeiten gibt, eine für Stoffgesetze geeignete Spannungsgeschwindigkeit zu definieren (z.B. sogen. Jaumann'sche Ableitung, Truesdell'sche Ableitung etc. /11/). Eine der wichtigsten ist die auf Jaumann zurückgehende Konstruktion. Sie wird meist mit $\overset{\nabla}{\sigma}_{ij}$ bezeichnet und ist folgendermaßen definiert

$$\overset{\nabla}{\sigma}_{ij} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \left(v_k \cdot \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_k} - \frac{1}{2} \sigma_{ik} \cdot \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right) - \frac{1}{2} \sigma_{jk} \cdot \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \right) \quad (2-4)$$

Man erkennt, daß $\overset{\nabla}{\sigma}_{ij}$ ein recht komplexer Ausdruck ist, der neben der partiellen Zeitableitung $\partial \sigma_{ij} / \partial t$ noch etliche Zusatzglieder enthält. Zu deren Interpretation sei bemerkt, daß die Terme innerhalb der Summe zugefügt sind, um Spannungsänderungen an den Materieteilchen von Starrkörperbewegungen zu befreien. Dabei berücksichtigt der erste Term die Konvektion, der zweite und dritte Term die Rotation der Teilchen bei der Bewegung.

Im Rahmen der Verallgemeinerung eines Stoffgesetzes der Art (2-3) ist der Term $\dot{\sigma}_{kl}$ durch $\overset{\nabla}{\sigma}_{kl}$ zu ersetzen. Weiterhin ist es zweckmäßig, die Verzerrungsgeschwindigkeit statt mit $\dot{\epsilon}_{ij}$ mit D_{ij} zu bezeichnen, weil die Größe ϵ_{ij} stets ein Verzerrungsmaß $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ suggeriert, dessen Verwendung nur bei kleinen Verformungen sinnvoll ist.

$$D_{ij} = \sum_{k,l=1}^3 \left(H_{ijkl} \cdot \overset{\nabla}{\sigma}_{kl} + C_{ijkl} \cdot \sigma_{kl} \right) \quad (2-5)$$

Es sind vor allem die modifizierten Zeitableitungen des Spannungstensors, die die Analyse und Berechnung von Spannungszustän-

den in belasteten Körpern und Strukturen verkomplizieren. Der Umgang mit einem Stoffgesetz vom Typ der Gleichung (2-2) wird erheblich unproblematischer, wenn man die Terme, die zeitliche Änderungen der Spannungskomponenten enthalten, vernachlässigt bzw. wegstreicht. Man muß sich allerdings bewußt sein, daß man damit elastische Effekte ausschließt. Vorgänge, bei denen Spannungsumlagerungen oder Relaxation im Vordergrund stehen, entziehen sich dann der Behandlung.

Bei Weglassen genannter Terme erhält man die folgende Stoffgleichung

$$D_{ij} = \sum_{k,l=1}^3 C_{ijkl} \cdot \sigma_{kl} \quad (2-6a)$$

bezw.

$$D_{ij} = \frac{3}{2} \cdot k \cdot \sigma_e^{n-1} \cdot S_{ij} \quad (2-6b)$$

Die Gleichungen (2-6a,b) genügen allen Objektivitätsanforderungen, die an ein Stoffgesetz (ob große oder kleine Verformungen) zu stellen sind. Sie stellt im wesentlichen ein nichtlineares Fließgesetz dar, wobei ein diesem Gesetz gehorchender Stoff kein Erinnerungsvermögen an einen bestimmten Ausgangszustand zeigt. Setzt man $n=1$ in Gl. (2-6b), so erhält man im übrigen die klassische Beziehung, die als Stoffgesetz bei der Berechnung inkompressibler viskoser Flüssigkeitsströmungen Verwendung findet /12/. Im Rahmen der Benutzung der Gl. (2-6a,b) bei Spannungs- und Verformungsanalysen nimmt man die jeweils aktuelle Konfiguration der belasteten, kriechenden Struktur zur Zeit t (zu der man sich z.B. numerisch Schritt für Schritt hingerechnet hat) und berechnet unter den aktuellen Belastungen das entsprechende Geschwindigkeitsfeld der Strukturpunkte. Das Geschwindigkeitsfeld wird dann benutzt, um die neue Konfiguration zur Zeit $t + \Delta t$ zu charakterisieren.

3. KRIECHVERFORMUNGEN UND SPANNUNGSVERTEILUNGEN IN DICKWANDIGEN ROHREN

Ein langes Rohr werde durch Innendruck, Außendruck sowie durch Kräfte in axialer Richtung belastet. Axialkräfte in druckführenden Rohren werden bereits durch die Druckverhältnisse induziert. Im folgenden wird auch der Fall miteinbezogen, daß zusätzlich zu der druckbedingten Axialkraft Kräfte parallel zur Rohrachse wirken (s. Abb. 2). Bei langen hängend angeordneten Rohren können solche Zusatzkräfte etwa durch angehängte Gewichte realisiert werden. Das Rohrmaterial soll für die folgenden Analysen einem Stoffgesetz der Form (2-6) genügen. Es wird jetzt darum gehen, zu einem vorgegebenen Zeitpunkt bei der aktuellen Geometrie das momentan sich einstellende Geschwindigkeits- und Spannungsfeld zu berechnen.

3.1 Grundgleichungen

Die im folgenden angegebenen drei Grundprinzipien steuern die statischen bzw. quasistatischen Berechnungen von Spannungen und Verformungsvorgängen in belasteten Strukturen. Für das durch Druck und axialen Zug belastete dickwandige Rohr werden die entsprechend zugeschnittenen Gleichungen angegeben.

- Kinematik: Herleitung von Verzerrungen (Formänderungen) aus einem Verschiebungsfeld bzw. von Verzerrungsgeschwindigkeiten aus einem Verschiebungsgeschwindigkeitsfeld (Kompatibilitätsrelationen)

Im Falle des dickwandigen Rohres werden die Gleichungen unter Verwendung eines Zylinder-Koordinatensystems formuliert. Bezeichnet man mit v_r und v_z die radiale und axiale Kriechgeschwindigkeit der Punkte in der sich verformenden Rohrwandung, so resultieren aus diesem Geschwindigkeitsfeld die folgenden Normalkomponenten des Verzerrungsgeschwindigkeitstensors (s. z.B. /3/)

$$D_r = \frac{\partial v_r}{\partial r} \quad (3-1a)$$

$$D_\theta = \frac{v_r}{r} \quad (3-1b)$$

$$D_z = \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (3-1c)$$

Hier und im folgenden wird anstatt mit doppelten Zahlenindices mit einfachen Buchstabenindices gearbeitet, wobei $r \hat{=} 11$, $\theta \hat{=} 22$, $z \hat{=} 33$ (d.h. $D_r = D_{11}$, $D_\theta = D_{22}$, $\sigma_r = \sigma_{11}$ etc). Unter den gegebenen Belastungsbedingungen des ('unendlich') langen Rohres treten im verwendeten Koordinatensystem keine Schubverzerrungskomponenten auf, so daß also nur die Normalkomponenten D_r , D_θ , D_z von Null verschieden sind.

- Gleichgewicht der an der Struktur angreifenden Kräfte: Ausbildung von Spannungszuständen in der Struktur dergestalt, daß jedes herausgeschnitten gedachte Volumenelement im Kräftegleichgewicht ist (Euler'sches Schnittprinzip)

Im Falle des dickwandigen Rohres unter den spezifizierten Belastungen reduzieren sich die das Gleichgewicht beschreibenden Feldgleichungen auf die folgenden zwei:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{r} \quad (3-2a)$$

$$-\int_a^b 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \sigma_z \cdot dr = F \quad (3-2b)$$

In (3-2b) bezeichnet F die gesamte axiale Kraft, die sowohl den durch $|\pi \cdot a^2 \cdot p_a - \pi \cdot b^2 \cdot p_b|$ gegebenen druckinduzierten Beitrag als auch unabhängig aufgebrachte Zusatzlasten (z.B. angehängtes Gewicht) beinhaltet: $F = F_{ex} + (\pi \cdot a^2 \cdot p_a - \pi \cdot b^2 \cdot p_b)$

Die gegebenen Gleichungen sind statischer Natur. Wenn auch im Falle von Kriechvorgängen die Verformungen zeitabhängig sind, so handelt es sich nicht um dynamische, sondern um quasistatische Vorgänge. Von einem dynamischen Problem spricht man nur dann, wenn die durch Beschleunigungen der einzelnen Volumenelemente bewirkten Trägheitseffekte (z.B. bei schwingenden Strukturen) einen entscheidenden Einfluß haben. Im Falle von Kriechvorgängen sind die durch die Ableitung des Kriechgeschwindigkeitsfeldes erhaltenen Beschleunigungen zu vernachlässigen.

- Stoffgleichung: Verknüpfung von kinematischen Größen (Verzerrungen, Verzerrungsgeschwindigkeiten) und statischen Größen (Spannungen)

Das verwendete Materialgesetz ist das in Gleichung (2-6) angegebene nichtlineare Fließgesetz für inkompressible Medien. Es verknüpft die Verzerrungsgeschwindigkeit mit dem Spannungsdeviator. Beim hier spezifizierten Problem ergeben sich die folgenden drei Gleichungen, die die Normalkomponenten des Spannungsdeviators mit den entsprechenden Verzerrungsgeschwindigkeiten verknüpfen.

$$D_r = \frac{3}{2} \cdot D_c \cdot \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_c} \right)^{n-1} \cdot \frac{S_r}{\sigma_c} \quad (3-3a)$$

$$D_\theta = \frac{3}{2} \cdot D_c \cdot \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_c} \right)^{n-1} \cdot \frac{S_\theta}{\sigma_c} \quad (3-3b)$$

$$D_z = \frac{3}{2} \cdot D_c \cdot \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_c} \right)^{n-1} \cdot \frac{S_z}{\sigma_c} \quad (3-3c)$$

In den Gleichungen (3-3) ist eine Spannungsgröße σ_c eingeführt worden, die sich aus k errechnen läßt: $k = D_c (1/\sigma_c)^n$. D_c ist hierbei eine dimensionsbehaftete Konstante mit dem Zahlenwert 1.0 und der Einheit [Zeiteinheit⁻¹]. Sie bewirkt lediglich eine Dimensionsanpassung von linker und rechter Seite und wird im folgenden, da sie auf die Zahlenwerte keinen Einfluß hat, in den Formeln nicht mitgenommen.

Für die folgenden Betrachtungen ist es zweckmäßig, die Gleichungen nach S_r , S_θ , S_z aufzulösen und die Vergleichsspannung σ_e zu ersetzen. Mit Hilfe der Vergleichsgröße $D_e^2 = \frac{2}{3} \cdot (D_r^2 + D_\theta^2 + D_z^2)$ erhält man

$$S_r = \frac{2}{3} \cdot \sigma_c \cdot D_e^{-\frac{n-1}{n}} \cdot D_r \quad (3-4a)$$

$$S_\theta = \frac{2}{3} \cdot \sigma_c \cdot D_e^{-\frac{n-1}{n}} \cdot D_\theta \quad (3-4b)$$

$$S_z = \frac{2}{3} \cdot \sigma_c \cdot D_e^{-\frac{n-1}{n}} \cdot D_z \quad (3-4c)$$

3.2 Auflösung der Gleichungen

Die Gleichungen (3-1), (3-2) und (3-4) begründen ein vollständiges System zur Lösung der gestellten Aufgabe. Sie gestatten es, für eine gegebene Zeit und für eine zu dieser Zeit bekannte Geometrie das Spannungs- und Geschwindigkeitsfeld in der Rohrwandung zu berechnen.

Im allgemeinen ist es nun nicht möglich, allein aus der Gleichgewichtsbedingung ein eindeutig bestimmtes Spannungsfeld zu berechnen, ohne von vornherein auf Kinematik und Materialgesetz Rücksicht zu nehmen. Falls die Möglichkeit jedoch besteht, so nennt man das System oder die Struktur statisch bestimmt. Statisch bestimmte Systeme haben den Vorteil, daß man losgelöst in einem ersten Schritt die Spannungszustände errechnet, aus denen man dann in einer Nachlaufrechnung die resultierenden Verformungen ermitteln kann. Faßt man ein Rohr als dünnwandig auf, so stößt man auf ein statisch bestimmtes System. Darauf wird später noch eingegangen werden.

Das dickwandige Rohr unter axialsymmetrischer Belastung ist im allgemeinen ein statisch unbestimmtes System. Bei der Ermittlung seines Spannungszustandes und des momentanen Geschwindigkeitsfeldes greifen Kinematik, Gleichgewichtsbedingung und Stoffgleichung ineinander, so daß der Lösungsweg über Kombinations- und Einsetzungsprozesse der bestimmenden Gleichungen führt.

Der erste Schritt der Berechnung kombiniert kinematische Elemente und die im Materialgesetz steckende Inkompressibilität:

$$D_r + D_\theta + D_z = 0 \quad (3-5a)$$

bzw. unter Verwendung von (3-1):

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (3-5b)$$

Im ungestörten Bereich des als lang angenommenen Rohres kann man bei der gegebenen Art der Belastung davon ausgehen, daß die axiale Verzerrungs- bzw. Dehngeschwindigkeit $D_z = \frac{\partial v_z}{\partial z} = \beta$ mit fortschreitender Verformung zwar von der Zeit, aber nicht von den Ortskoordinaten abhängig ist. Eine Abhängigkeit der Größe β

von der z-Koordinate würde nämlich lokal unterschiedliche Dehnungsgeschwindigkeiten in Längsrichtung bedeuten. Eine solche Situation könnte sich nur entwickeln, wenn das Rohr Formabweichungen aufweist (z.B. fertigungsbedingte Wandschwankungen). Das wird aber im Rahmen der Rechnungen mit perfekt angenommener Geometrie nicht betrachtet.

Eine Abhängigkeit von β von der r-Koordinate hätte Schubspannungen zur Folge, die für die Lastsituation bei idealer Geometrie im ungestörten Rohrbereich nicht auftreten können.

Weiterhin kann man davon ausgehen, daß v_r - was räumliche Koordinaten anbelangt - nur von r und nicht noch von z abhängt.

Bei Einführung von β wird aus (3-5b):

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} = -\beta \quad (3-5c)$$

Aufgrund der eben gemachten Ausführungen läßt sich Gl. (3-5c) mit dem folgenden Ergebnis integrieren:

$$v_r = \frac{C}{r} - \frac{\beta}{2} \cdot r \quad (3-6)$$

Hierbei bezeichnet C einen ortsunabhängigen Parameter im radialen Geschwindigkeitsfeld, der - wie die axiale Dehnungsgeschwindigkeit β - von der Zeit abhängig ist.

Mit (3-6) erhält man die folgenden Ausdrücke für die Verzerrungsgeschwindigkeitskomponenten:

$$D_r = -\left(\frac{\beta}{2} + \frac{C}{r^2}\right) \quad (3-7a)$$

$$D_\theta = -\left(\frac{\beta}{2} - \frac{C}{r^2}\right) \quad (3-7b)$$

$$D_z = \beta \quad (3-7c)$$

Die Vergleichsdehnung $D_e = \left(\frac{2}{3} (D_r^2 + D_\theta^2 + D_z^2)\right)^{0,5}$ errechnet sich aus (3-7) zu:

$$D_e = \left(\beta^2 + \frac{4}{3} \cdot \frac{C^2}{r^4}\right)^{0,5} \quad (3-8)$$

Wenn man die Formeln (3-7) und (3-8) in das Stoffgesetz (3-4) einsetzt, entstehen die folgenden Gleichungen:

$$S_r = -\frac{2}{3} \cdot \sigma_c \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{\zeta^2}{r^4} + \beta^2 \right)^{-\frac{n-1}{2n}} \cdot \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\zeta}{r^2} \right) \quad (3-9a)$$

$$S_\theta = -\frac{2}{3} \cdot \sigma_c \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{\zeta^2}{r^4} + \beta^2 \right)^{-\frac{n-1}{2n}} \cdot \left(\frac{\beta}{2} - \frac{\zeta}{r^2} \right) \quad (3-9b)$$

$$S_z = \frac{2}{3} \cdot \sigma_c \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{\zeta^2}{r^4} + \beta^2 \right)^{-\frac{n-1}{2n}} \cdot \beta \quad (3-9c)$$

Mit Hilfe von (3-9) und der Gleichgewichtsbedingung (3-2a) läßt sich eine Differentialgleichung für σ_r erhalten, die bei vorgegebenem β eine Bestimmung der Integrationskonstanten C erlaubt. Aus der Definition des Deviators folgt, daß $\sigma_\theta - \sigma_r = S_\theta - S_r$ ist. Bildet man die Differenz von Gl. (3-9b) und Gl. (3-9a) und setzt diese in die Gleichgewichtsbedingung ein, so erhält man für die Ableitung von σ_r nach r :

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \frac{2}{3} \cdot \sigma_c \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{\zeta^2}{r^4} + \beta^2 \right)^{-\frac{n-1}{2n}} \cdot \frac{2\zeta}{r^3} \quad (3-10).$$

Genauso wie v_r hängt - was die räumlichen Koordinaten anbelangt - σ_r nur von r ab.

Somit ist die Lösung von (3-10):

$$\sigma_r = \int \frac{2}{3} \cdot \sigma_c \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{\zeta^2}{r^4} + \beta^2 \right)^{-\frac{n-1}{2n}} \cdot \frac{2\zeta}{r^3} \cdot dr + \psi(t) \quad (3-11a)$$

Hierbei ist $\psi(t)$ eine nur noch von der Zeit abhängende Funktion. Es ist zweckmäßig, die allgemeine Form (3-11a) etwas umzuformulieren. Geht man auf bestimmte Integrale über und wählt man als untere Grenze des Integrals den Innenradius a , so schreibt sich (3-11a):

$$\sigma_r = \sigma_r(r,t) = \int_a^r \frac{2}{3} \cdot \sigma_c \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{\zeta^2}{s^4} + \beta^2 \right)^{-\frac{n-1}{2n}} \cdot \frac{2\zeta}{s^3} \cdot ds - p_a(t) \quad (3-11b)$$

In dieser umgeformten Gleichung wird die eben eingeführte Zeitfunktion $\psi(t)$ interpretierbar. Es handelt sich nämlich um die radiale Spannung $\sigma_r(a,t)$ an der inneren Oberfläche des Rohres, die gleich dem negativ genommenen Innendruck $p_a = p_a(t)$ zur Zeit t ist (Druckspannungen haben ein negatives Vorzeichen!).

Um nun C zu bestimmen, wird ausgenutzt, daß auf der äußeren Rohroberfläche ($r=b$) als Randbedingung der bekannte Druck $p_b = P_b(t)$ herrscht. Integriert man in (3-11b) bis $r=b$, so resultiert eine Gleichung, die bei vorgegebenem β nur noch C als unbekannte Größe enthält:

$$\frac{3}{4} \frac{p_a - p_b}{\sigma_c} = \int_a^b \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{C^2}{s^4} + \beta^2 \right)^{-\frac{n-1}{2n}} \cdot \frac{C}{s^3} \cdot ds \quad (3-12)$$

Für das Integral in (3-12) konnte im allgemeinen Falle keine explizierte Stammfunktion gefunden werden, so daß man die Bestimmung von C mit numerischen Methoden vornehmen muß.

Dazu betrachtet man die in (3-13) definierte Funktion $F(C)$:

$$F(C) = \int_a^b \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{C^2}{s^4} + \beta^2 \right)^{-\frac{n-1}{2n}} \cdot \frac{C}{s^3} \cdot ds - \frac{3}{4} \frac{p_a - p_b}{\sigma_c} \quad (3-13)$$

Man wertet nun $F(C)$ für hinreichend dicht liegende gegebene C -Werte numerisch aus (z.B. mit Newton-Cotes-Integrationsverfahren), wobei man natürlich C in einem Wertebereich zu variieren hat, der die Nullstelle enthält. Aus der punktwise vorliegenden $F(C)$ -Kurve interpoliert man dann die Nullstelle.

Mit dem Auffinden des C -Wertes, der $F(C)$ zu Null macht, hat man das Problem des druckbeaufschlagten Rohres unter zusätzlichem axialem Zug im wesentlichen gelöst. Sämtliche kinematische und statische Größen sind nun berechenbar, allerdings mit dem kleinen Schönheitsfehler, daß bei der Problemstellung normalerweise die axiale Kraft F (s. Gl. (3-2b)) als Randbedingung fungiert, hier aber im Rahmen der Lösung des Problems $D_z = \beta$ als vorgegeben vorausgesetzt wurde.

Wenn die axiale Kraft vorgegeben ist, so ist für den hier angegebenen Lösungsweg notwendig, mit einem Schätzwert von β zu beginnen und durch 'trial and error'-Prozeduren F und β aufeinander abzustimmen.

Damit ist dann die gestellte Aufgabe, bei gegebenen geometrischen Größen und Lastbedingungen ein Geschwindigkeitsfeld in der Rohrwandung und den entsprechenden Spannungszustand zu bestimmen, gelöst.

Das aktuelle Geschwindigkeitsfeld in der Wandung bewirkt nun Verschiebungen, so daß es im Laufe der Zeit zu Geometrieänderungen kommt. Unter Umständen können auch die äußeren Lasten (Drücke, Axialkraft) als Funktion der Zeit gesteuert werden.

Die aktuellen Werte von Innenradius und Außenradius zur Zeit t_i , die mit a_i und b_i bezeichnet werden sollen, werden sich nun gemäß dem Geschwindigkeitsfeld in dem kleinen Zeitinkrement Δt ändern, wobei in erster Näherung gesetzt werden kann:

$$a_{i+1} = a_i + v_r(a_i, t_i) \cdot \Delta t \quad (3-14a)$$

$$b_{i+1} = b_i + v_r(b_i, t_i) \cdot \Delta t \quad (3-14b)$$

Für die neue Geometrie ist dann unter den Lastrandbedingungen zur Zeit $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ der angegebene Lösungsweg zu verfolgen und das Spannungs/Geschwindigkeitsfeld zur Zeit t_{i+1} zu ermitteln.

Ein besonderes Augenmerk ist auf die Wahl bzw. die Bestimmung des Zeitinkrements Δt zu richten. Es ist zweckmäßig, Δt an die Veränderung der Rohrgeometrie zu koppeln und zu jedem Zeitpunkt neu zu berechnen. Bei dem im nachfolgenden Flußdiagramm 1 angegebenen Verfahren wird Δt über eine Größe δ reguliert, die die Wandstärkenabnahme von Zeitpunkt zu Zeitpunkt charakterisiert. Die Berechnung von Δt erfolgt nach folgendem Schema:

Wandstärke zur Zeit t_i : $b_i - a_i$

Wandstärke zur Zeit t_{i+1} : $b_{i+1} - a_{i+1}$

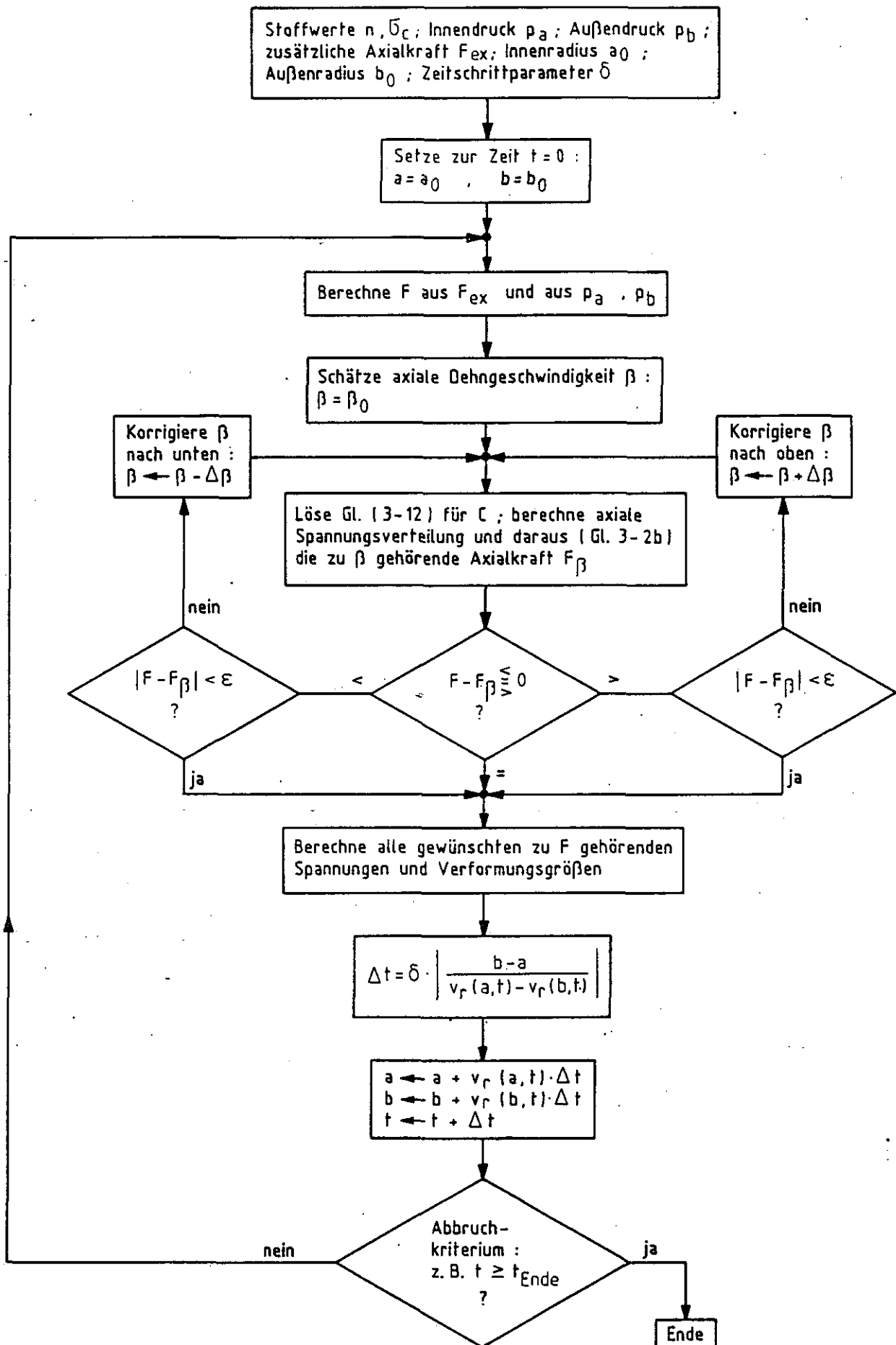
$$b_{i+1} - a_{i+1} = (b_i + v_r(b_i, t_i) \cdot \Delta t) - (a_i + v_r(a_i, t_i) \cdot \Delta t) \quad (3-14c)$$

Sollen sich die Wandstärken zu benachbarten Zeitpunkten t_i , t_{i+1} um höchstens $\delta \cdot 100$ % unterscheiden, so folgt aus

$$\left| \frac{(b_{i+1} - a_{i+1}) - (b_i - a_i)}{b_i - a_i} \right| \leq \delta \quad (3-14d)$$

mit Hilfe von (3-14c) für Δt

$$\Delta t \leq \delta \cdot \frac{b_i - a_i}{v_r(a_i, t_i) - v_r(b_i, t_i)} \quad (3-14e)$$



Flußdiagramm 1

3.2.1 Der Verformungszustand ohne Verlängerung in axialer Richtung

Für den Fall, daß keine kriechbedingten Längenänderungen in axialer Richtung auftreten, also $\beta=0$ ist, kann die der Bestimmung von C dienende Gleichung (3-12) explizit integriert werden. Man erhält nach Auswertung von (3-12), wobei zur Abkürzung

$\Delta p = p_a - p_b$ gesetzt ist

$$C = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{\Delta p \cdot \sqrt{3}}{\sigma_c \cdot n} \right)^n \cdot \left(a^{-\frac{2}{n}} - b^{-\frac{2}{n}} \right)^{-n} \quad (3-15)$$

Die Kriechgeschwindigkeitsverteilung $v_r(r)$ in der Rohrwandung ergibt sich damit zu (siehe (3-6)):

$$v_r(r) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{\Delta p \cdot \sqrt{3}}{\sigma_c \cdot n} \right)^n \cdot \left(a^{-\frac{2}{n}} - b^{-\frac{2}{n}} \right)^{-n} \cdot \frac{1}{r} \quad (3-16)$$

Unter Benutzung des Wertes für C erhält man für die Verteilung der Spannungskomponenten in der momentanen Geometrie, die durch den Innenradius a und den Außenradius b charakterisiert ist

$$\sigma_r(r) = -p_a + \frac{\Delta p}{a^{-\frac{2}{n}} - b^{-\frac{2}{n}}} \cdot \left(a^{-\frac{2}{n}} - r^{-\frac{2}{n}} \right) \quad (3-17a)$$

Gemäß Gl. (3-2a) folgt $\sigma_\theta = \sigma_r + r \cdot \frac{\partial \sigma_r}{\partial r}$

bzw. konkret mit Hilfe von (3-17a)

$$\sigma_\theta(r) = -p_a + \frac{\Delta p}{a^{-\frac{2}{n}} - b^{-\frac{2}{n}}} \cdot \left(a^{-\frac{2}{n}} - \left(1 - \frac{2}{n} \right) \cdot r^{-\frac{2}{n}} \right) \quad (3-17b).$$

σ_z erhält man mit Hilfe von Gl. (3-9c), wenn man beachtet, daß $\beta=0$ ist

$$S_z = \sigma_z - \frac{1}{3} (\sigma_\theta + \sigma_r + \sigma_z) = 0$$

$$\sigma_z(r) = -p_a + \frac{\Delta p}{a^{-\frac{2}{n}} - b^{-\frac{2}{n}}} \cdot \left(a^{-\frac{2}{n}} - \left(1 - \frac{1}{n} \right) \cdot r^{-\frac{2}{n}} \right) \quad (3-17c)$$

Es stellt sich nun die Frage, welche Axialkraft F nach Gl. (3-2) dem Fall $\beta=0$ entspricht. Dazu ist die folgende Integration auszuführen

$$F = - \int_a^b 2\pi r \cdot \left(-p_a + \frac{\Delta p}{a^{-\frac{2}{n}} - b^{-\frac{2}{n}}} \cdot \left(a^{-\frac{2}{n}} - \left(1 - \frac{1}{n} \right) \cdot r^{-\frac{2}{n}} \right) \right) \cdot dr \quad (3-18a).$$

Das Ausrechnen des Integrals führt zu

$$F = \pi \cdot b^2 \cdot p_b - \pi \cdot a^2 \cdot p_a \quad (3-18b).$$

Der Fall $\beta=0$ entspricht also keineswegs einer Belastungssituation ohne jegliche Axialkraft. Er charakterisiert den in Abb. 2 angedeuteten Zustand ohne angehängtes Zusatzgewicht, wobei lediglich druckinduzierte Axialkräfte auftreten. Ist zum Beispiel der Außendruck zu vernachlässigen, so ist die Axialkraft nur durch den Innendruck bestimmt: $|F| = \pi \cdot a^2 \cdot p_a$. Trotz einer derartigen Kraft findet im ungestörten Bereich des als lang angenommenen Rohres keine kriechbedingte Verlängerung in axialer Richtung statt.

Das durch die Gleichungen (3-16) und (3-17) gegebene Geschwindigkeits-/Spannungsfeld beschreibt den momentanen Zustand einer Rohrwand, die bei Innenradius a und Außenradius b durch Drücke p_a und p_b beansprucht ist.

Hält man die Druckniveaus in der Zeit konstant, so wird sich das Rohr mehr und mehr aufweiten, wobei sich die Wandstärke verdünnt. Schließlich wird nach endlicher Zeit ein Zustand $a, b \rightarrow \infty$ erreicht. Im folgenden soll dieser Zeitpunkt, bei dem das Rohr 'duktil auseinandergeflossen' ist, berechnet werden.

Aus (3-16) folgt für die Verschiebungsgeschwindigkeiten $v_r(a)$ und $v_r(b)$ der inneren und äußeren Rohroberfläche

$$v_r(a) = \frac{da}{dt} = \Gamma \cdot \frac{\left(a^{-\frac{2}{n}} - b^{-\frac{2}{n}}\right)^{-n}}{a} \quad (3-19a)$$

$$v_r(b) = \frac{db}{dt} = \Gamma \cdot \frac{\left(a^{-\frac{2}{n}} - b^{-\frac{2}{n}}\right)^{-n}}{b} \quad (3-19b)$$

wobei zur Abkürzung $\Gamma = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{\Delta p}{\sigma_c} \cdot \frac{\sqrt{3}}{n}\right)^n$ gesetzt ist.

Es ist zweckmäßig, zu den Variablen

$$\alpha = a^2 \quad (3-20a)$$

$$x = b^2 \quad (3-20b)$$

überzugehen.

Damit wird aus (3-19)

$$\frac{d\alpha}{dt} = 2 \cdot \Gamma \cdot \left(\alpha^{-\frac{1}{n}} - x^{-\frac{1}{n}}\right)^{-n} \quad (3-21a)$$

$$\frac{dX}{dt} = 2 \cdot \Gamma \cdot \left(a^{-\frac{1}{n}} - X^{-\frac{1}{n}} \right)^{-n} \quad (3-21b)$$

Aus diesen beiden gekoppelten nichtlinearen Differentialgleichungen kann eine einzige Gleichung für die Größe $\zeta = \frac{a}{X}$ konstruiert werden:

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{a}{X} \right) = \frac{1}{X} \cdot \frac{da}{dt} - \frac{a}{X^2} \cdot \frac{dX}{dt} \quad (3-22a)$$

Nun ist aber (vergl. (3-21a) und (3-21b)) $\frac{d\alpha}{dt} = \frac{dX}{dt}$, so daß man aus (3-22) erhält

$$\frac{d\zeta}{dt} = (1 - \zeta) \cdot \frac{1}{X} \cdot \frac{dX}{dt} \quad (3-22b)$$

$\frac{1}{X} \frac{dX}{dt}$ läßt sich mit Hilfe von (3-21b) als Funktion von ζ bestimmen, so daß man schließlich aus (3-22b) die folgende Differentialgleichung für $\frac{d\zeta}{dt}$ erhält

$$\frac{d\zeta}{dt} = 2 \cdot \Gamma \cdot (1 - \zeta) \cdot \left(\zeta^{-\frac{1}{n}} - 1 \right)^{-n} \quad (3-23)$$

Die Versagenszeit erhält man nun unter Beachtung der Tatsache, daß $\zeta(t)$ das quadrierte Verhältnis von Innen- und Außenradius darstellt, das zum Versagenszeitpunkt gegen 1 geht. Bezeichnet man mit ζ_0 das Ausgangsverhältnis $\left(\frac{a_0}{b_0} \right)^2$, so errechnet sich der Versagenszeitpunkt T zu

$$T = \frac{1}{2 \cdot \Gamma} \cdot \int_{\zeta_0}^1 \frac{\left(\zeta^{-\frac{1}{n}} - 1 \right)^n}{1 - \zeta} \cdot d\zeta \quad (3-24)$$

Das Integral (3-24) kann problemlos numerisch (z.B. Newton-Cotes-Verfahren) ausgewertet werden.

Im folgenden soll noch kurz ein numerisches Beispiel angeführt werden. In /2/ werden für Zugversuche an einer Stabmaterialcharge aus INCOLOY 800 H Stoffwerte $n = 8,3$ und $\sigma_c = 69,25 \text{ N/mm}^2$ ($k = 5,3 \cdot 10^{-16} [\text{h}^{-1} \cdot (\text{N/mm}^2)^{-n}]$) bei 950°C angegeben. Bei einem Innendruck von 53,49 bar errechnet man für ein von den geometrischen Abmessung her typisches Röhrenspaltrofenrohr mit $a_0 = 50 \text{ mm}$ und $b_0 = 60 \text{ mm}$ einen Versagenszeitpunkt $T = 333,4$ Stunden. Für die numerische Integration wurde dabei das Intervall $[\zeta_0, 1]$ in 50 äquidistante Segmente eingeteilt.

3.2.2 Das dickwandige Rohr unter reiner axialer Zugbelastung

Neben dem eben besprochenen Fall läßt sich auch das durch eine konstant gehaltene Axialkraft beanspruchte Rohr relativ einfach abhandeln und die Versagenszeit berechnen. Innen- und Außendruck seien hierbei beide zu $p_a = p_b = p$ angenommen.

Die Gleichung (3-12) läßt für diesen Fall nur die Lösung $C=0$ zu. Daraus folgt sofort

$$\sigma_r = \text{const.} = -p \quad (3-25a)$$

Mit den Gleichungen (3-9) folgt für die Deviatorikkomponenten

$$S_z = -2 \cdot S_r = -2 \cdot S_\theta = \frac{2}{3} \cdot \sigma_c \cdot \beta^{\frac{1}{n}} \quad (3-26)$$

Unter Benutzung von (3-25a) erhält man daraus für die Spannungs-komponenten σ_θ, σ_z :

$$\sigma_\theta = -p \quad (3-25b)$$

$$\sigma_z = -p + \sigma_c \cdot \beta^{\frac{1}{n}} \quad (3-25c)$$

Die Gleichgewichtsbedingung (3-2b) liefert nun für F

$$F = -\pi \cdot (b^2 - a^2) \cdot (\sigma_c \cdot \beta^{\frac{1}{n}} - p) \quad (3-27)$$

Man beachte, daß F auch bei rein hydrostatischer Belastung einen Druckbeitrag enthält. Die reine Axialkraft F_{ex} - in Abb. 2 durch das angehängte Gewicht repräsentiert - beträgt

$$|F_{\text{ex}}| = |F - (\pi \cdot b^2 \cdot p - \pi \cdot a^2 \cdot p)| = \sigma_c \cdot \beta^{\frac{1}{n}} \cdot \pi \cdot (b^2 - a^2) \quad (3-28)$$

Aus der Inkompressibilitätsbedingung folgt, daß ein aus dem 'unendlich' langen Rohr herausgeschnittenes materielles Stück der Anfangslänge l_0 sowie den Anfangsradien a_0, b_0 während der Verformung sein Volumen nicht ändert. Bezeichnet man die momentanen Werte von Länge und Radien dieses im Anfangsstadium ausgewiesenen Materialstückes mit l, a, b , so gilt

$$\pi \cdot l \cdot (b^2 - a^2) = \pi \cdot l_0 \cdot (b_0^2 - a_0^2) \quad (3-29a)$$

bzw.

$$b^2 - a^2 = \frac{l_0}{l} \cdot (b_0^2 - a_0^2) \quad (3-29b)$$

Die axiale Verzerrungsgeschwindigkeit β ausgedrückt als Funktion von l sowie der Zeitableitung $\frac{dl}{dt}$ schreibt sich

$$\beta = \frac{1}{l} \cdot \frac{dl}{dt} \quad (3-30)$$

Damit folgt aus (3-28) nach etwas Umordnen

$$\left(\frac{|F_{ex}|}{\pi \cdot (b_0^2 - a_0^2) \cdot l_0 \cdot \sigma_c} \right)^n = \frac{1}{l^{n+1}} \cdot \frac{dl}{dt} \quad (3-31)$$

Die Versagenszeit T ergibt sich im Falle einer Zugbelastung für $l \rightarrow \infty$ aus (3-31) zu

$$T = \int_0^T dt = \left(\frac{\sigma_c}{\sigma_{nom}} \right)^n \cdot l_0^n \int_{l_0}^{\infty} \frac{dl}{l^{n+1}} = \left(\frac{\sigma_c}{\sigma_{nom}} \right)^n \cdot \frac{1}{n} \quad (3-32)$$

Hierbei ist die nominale Spannung $\sigma_{nom} = \frac{F_{ex}}{(b_0^2 - a_0^2) \cdot \pi}$ eingeführt worden.

Mit den am Ende des letzten Abschnitts angegebenen Stoffwerten $n = 8,3$ und $\sigma_c = 69,25 \text{ N/mm}^2$ erhält man für eine Nominalspannung $\sigma_{nom} = 25 \text{ N/mm}^2$ eine Versagenszeit $T = 566,9 \text{ h}$.

3.2.3 Beispiele numerischer Untersuchungen an dickwandigen Rohren unter Innendruck und axialem Zug

Die in den letzten beiden Abschnitten besprochenen Belastungssituationen sind die einzigen, die sich weitgehend in analytischen Rechnungen abhandeln lassen. Legt man Druckbelastung und gleichzeitig axialen Zug zugrunde, so muß man numerische Rechnungen entsprechend dem auf Seite 16 angegebenen Flußdiagramm durchführen, wenn man das Schicksal der sich verformenden Rohrwandung verfolgen will.

Im folgenden werden Spannungs-Verformungs-Rechnungen an einer Rohrgeometrie für unterschiedliche Kombinationen von Druck und axialem Zug präsentiert.

Die Abmessungen von Innen- und Außenradius zur Zeit $t=0$ sind zu $a_0 = 50$ mm und $b_0 = 60$ mm angenommen. Die Stoffparameter des Nortongesetzes sind die zum Ende des letzten Abschnitts angegebenen Werte $n = 8,3$ und $\sigma_c = 69,25$ N/mm. Die Druck- und Axialkraftbelastung der Rechenfälle wurden so aufeinander abgestimmt, daß in der Wandung eine Vergleichsspannung von etwa 25 N/mm² zu Beginn der Verformung herrscht. Der entsprechende funktionale Zusammenhang zwischen zusätzlicher Axialkraft F_{ex} und der Druckdifferenz $\Delta p = p_a - p_b$ - der Außendruck p_b ist hierbei stets zu 1 bar angesetzt - wurde dabei mit Hilfe der einfachen Näherungsformeln vorgenommen, wie sie in den folgenden Abschnitten noch angegeben werden (s. Abb. 3). Für Berechnungen ausgewählt wurden die Wertekombinationen, die in der Tabelle I (s. Abb. 3) aufgeführt sind. Der erste Fall entspricht einer reinen Druckbelastung mit $p_a = 53,49$ bar und $p_b = 1$ bar ($\Delta p = 52,49$ bar). Im zweiten bis sechsten Fall wird mit aufsteigender Fallnummer die axiale Zusatzkraft vergrößert. Schließlich repräsentiert der siebte Fall eine nur durch Axialbelastung bestimmte Situation.

Aus den Abbildungen 4 bis 12 sind die zeitlich sich ändernden geometrischen Verhältnisse sowie die Spannungsverläufe zu entnehmen. Die Abb. 4 zeigt das zeitliche Verhalten des mittleren Rohrradius $\bar{r} = (a+b)/2$ charakterisiert durch den natürlichen Logarithmus von \bar{r}/\bar{r}_0 , wobei $\bar{r}_0 = (a_0+b_0)/2$ hier den mittleren Ausgangsradius bezeichnet. Man erkennt deutlich, daß je nach Belastungskombination recht unterschiedliche Versagenszeitpunkte zu verzeichnen sind. Die kürzeste Standzeit weist bei jeweils gleicher Vergleichsspannung das nur durch Innen- und Außendruck beanspruchte Rohr auf. Ein Maximum der Standzeit findet sich in der Umgebung der Belastungssituation des Falles 6, während sich im Falle einer reinen Axialkraft wiederum kürzere Versagenszeiten errechnen. Das Maximum dürfte wohl bei der Lastkombination angesiedelt sein, für die $\ln(\bar{r}/\bar{r}_0) = 0$ über den gesamten Verformungsvorgang gilt. Es markiert auch einen qualitativen Sprung des Verformungsverhaltens: Bei hinreichend großem Innendruck weitet sich das Rohr kontinuierlich auf ($\bar{r} \rightarrow \infty$), während bei einer hauptsächlich durch die Axialkraft bestimmten Situation das Rohr sich zusammenzieht ($\bar{r} \rightarrow 0$).

In Abb. 5 ist für die Rechenfälle der Logarithmus der relativen Verlängerung l/l_0 dargestellt. Der Fall 1 (reine Druckbelastungen) gibt das bereits im letzten Abschnitt angegebene Ergebnis wieder: Es findet keine Verlängerung in axialer Richtung statt. Abb. 6 zeigt die Zeitverläufe der Wandstärke. Aus den Abb. 7 bis 12 ist das Verhalten der Spannungen als Funktion der Zeit zu entnehmen. Abb. 7 und 8 zeigen die von Mises Vergleichsspannung an der inneren und äußeren Rohroberfläche. Ihre Startwerte zur Zeit $t=0$ sind innen etwas größer und außen etwas kleiner als 25 N/mm^2 . Im großen und ganzen ist aber die Variation über die Wanddicke des Rohres klein. Zur Abrundung des Spannungsbildes sind in den Abb. 9, 10, 11, 12 noch Tangential- und Axialspannungen dargestellt. Die Kurven beschreiben die zeitlichen Spannungsverläufe an Außen- und Innenradius. Während die von Mises Spannung innen die höheren Werte aufweist, ist es sowohl bei der Axial- als auch bei der Tangentialspannung umgekehrt. Die Maxima liegen auf der äußeren Rohroberfläche.

Die Rechnungen wurden mit einem nach Flußdiagramm 1 (Seite 16) aufgebauten Rechenprogramm durchgeführt. Der Zeitschritt wurde dabei so gesteuert, daß sich die Wandstärke von Zeitpunkt zu Zeitpunkt lediglich um $0,05 \%$ ($\delta = 0,0005$) änderte.

Die Versagenszeiten für die Rechenfälle sind aus Tabelle II zu entnehmen. Zusätzlich zu den mit $\delta = 0,0005$ ausgeführten Rechnungen sind Rechnungen mit größeren Zeitschritten durchgeführt worden ($\delta = 0,001$, $\delta = 0,01$). Hierbei ergaben sich rechnerisch durchweg größere Versagenszeiten. Dies ist auch aus dem im folgenden dargelegten Grund verständlich:

Die im Zeitschritt stattfindende Kriechverformung wird im numerischen Verfahren durch das Spannungsniveau zu Beginn des Zeitschritts bestimmt. Die Spannungen steigen nun im Verlauf des Verformungsvorganges monoton an, so daß man die innerhalb eines Zeitschritts erzeugte Kriechverformung stets etwas unterschätzt, wenn man die Rechnung auf Basis der am Zeitintervallanfang vorliegenden Rechenwerte durchführt. Bei dem hohen auftretenden Exponenten $n = 8,3$ können bei allzu grober Diskretisierung große Fehler auftreten. Man mache sich klar, daß 1%

Fehler in den Spannungen für $n = 8,3$ fast 9 % Fehler bei der Berechnung der Kriechverzerrungen ausmachen ($\Delta \epsilon = D \cdot \Delta t = k \cdot 6^n \cdot \Delta t!$).

Für die Rechenfälle 1 und 7 liegen noch die mit analytischen Methoden gewonnenen Versagenszeiten vor. Zieht man diese Werte vergleichend heran, so erkennt man, daß man durchaus noch etwas feiner hätte diskretisieren können (z.B. $\delta = 0,0001$). Allerdings bedeutet das längere Rechenzeiten. Genauere Ergebnisse bei etwa gleicher Diskretisation könnte man sicher bei Wahl eines Zeitintegrationsverfahrens erzielen, das dem hier gewählten Euler-Cauchy'schen Vorwärtsverfahren überlegen ist. Jedoch erfordert das ein etwas anders strukturiertes Programm.

4. NÄHERUNGSVERFAHREN ZUR BERECHNUNG VON SPANNUNGEN UND KRIECHVERFORMUNGEN

Die Berechnung von Spannungen und Kriechverformungen gestaltet sich dann für Rohrgeometrien recht einfach, wenn man das Rohr als 'dünnwandige Membran' ansehen kann. Eine generelle Abgrenzung dahingehend, unter welchen Voraussetzungen ein Rohr als dünnwandig angesehen werden kann, soll hier allerdings nicht vorgenommen werden. Nachdem die Grundgleichungen der Membrannäherung angegeben und aufgearbeitet sind, werden für die im letzten Abschnitt angegebenen Lastsituationen - wobei das 'dickwandige' Rohr als 'dünnwandig' behandelt wird - Spannungs-Verformungsrechnungen durchgeführt und den in Kapitel 3 erzielten Ergebnissen gegenübergestellt.

Wird ein Rohr durch eine Druckdifferenz $\Delta p = p_a - p_b$ und eine zusätzliche axiale Kraft belastet, so läßt sich im Rahmen der Membrannäherung der Spannungszustand allein aus der Gleichgewichtsbedingung errechnen. Man hat es hier mit einem statisch bestimmten System zu tun.

Bezeichnet man mit R den (mittleren) Rohrradius und mit s die Wandstärke, wobei im Rahmen der Näherung $s \ll R$ vorausgesetzt ist, so gilt für die in der Wandung herrschende Axial- und Umfangsspannung σ_z und σ_θ (Stichwort Kesselformel):

$$\sigma_\theta = \Delta p \cdot \frac{R}{s} \quad (4-1a)$$

$$\sigma_z = \Delta p \cdot \frac{R}{2 \cdot s} + \frac{F_{ex}}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot s} \quad (4-1b)$$

Eine Variation der Spannungen über die Wandstärke wird vernachlässigt, ebenso wird die Komponente σ_r näherungsweise zu Null angenommen. Zur Berechnung der Verzerrungsgeschwindigkeiten D_r , D_θ und D_z wird die v. Mises Spannung benötigt, die in den Erklärungen zu Formel (2-2) definiert ist. Durch etwas Rechnung unter Beachtung der Tatsache, daß nur Normalspannungskomponenten vorhanden sind, hält man für σ_e

$$\sigma_e = \left(\sigma_\theta^2 + \sigma_z^2 - \sigma_\theta \cdot \sigma_z \right)^{0,5} \quad (4-2)$$

Die Deviatoren S_r , S_θ , S_z errechnen sich aus den Spannungskomponenten zu (beachte $\sigma_r = 0$)

$$S_r = \frac{1}{3} (\sigma_\theta + \sigma_z) \quad (4-3a)$$

$$S_\theta = \frac{2}{3} \sigma_\theta - \frac{1}{3} \sigma_z \quad (4-3b)$$

$$S_z = \frac{2}{3} \sigma_z - \frac{1}{3} \sigma_\theta \quad (4-3c)$$

Somit stehen nun alle Größen bereit, um in einer 'Nachlaufrechnung' die Verzerrungsgeschwindigkeiten zu bestimmen.

Setzt man die Relationen (4-1) - (4-3) untereinander und dann in (3-3) ein, so erhält man für D_r , D_θ , D_z

$$D_r = - \left(\frac{1}{\sigma_c} \right)^n \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{\Delta p \cdot R}{s} \right)^2 + \left(\frac{F_{ex}}{2 \pi R s} \right)^2 \right)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot \Delta p \cdot \frac{R}{s} + \frac{F_{ex}}{4 \pi R s} \right) \quad (4-4a)$$

$$D_\theta = \left(\frac{1}{\sigma_c} \right)^n \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{\Delta p \cdot R}{s} \right)^2 + \left(\frac{F_{ex}}{2 \pi R s} \right)^2 \right)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot \Delta p \cdot \frac{R}{2} - \frac{F_{ex}}{4 \pi R s} \right) \quad (4-4b)$$

$$D_z = \left(\frac{1}{\sigma_c} \right)^n \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{\Delta p \cdot R}{s} \right)^2 + \left(\frac{F_{ex}}{2 \pi R s} \right)^2 \right)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{F_{ex}}{2 \pi R s} \quad (4-4c)$$

Man erkennt aus den durchgeführten Ableitungen, daß sich sowohl die Spannungen als auch die kinematischen Größen explizit als Funktion der Lasten Δp , F_{ex} und der geometrischen Größen R , s ausdrücken lassen.

4.1 Die Behandlung großer Verformungen

Die Gleichungen des letzten Abschnitts charakterisieren einen momentan herrschenden Spannungs-Verzerrungsgeschwindigkeitszustand. Es gilt nun ein Differentialgleichungssystem herzuleiten, das die zeitliche Entwicklung der durch s und R definierten Rohrgeometrie beschreibt. Dieses System wird aus 2 Gleichungen für R und s bestehen.

Zuerst einmal schreibt man zweckmäßigerweise die beiden Verzerrungsgeschwindigkeiten D_r und D_θ als Funktion des Radius R , der Wandstärke s sowie deren zeitlichen Ableitungen an. Wie im weiteren erklärt wird, gilt für D_r und D_θ

$$D_r = \dot{s}/s \quad (4-5a)$$

$$D_\theta = \dot{R}/R \quad (4-5b)$$

Zur Ableitung von (4-5b) sei von Gleichung 3-1b) ausgegangen. Bewegt sich der mittlere Radius R in der Zeit Δt um ΔR , so ist die momentane Geschwindigkeit eines auf dem mittleren Radius befindlichen Materiepunktes durch $\bar{v}_r = \Delta R / \Delta t$ gegeben. Im Grenzfall $\Delta t \rightarrow 0$ resultiert somit zusammen mit (3-1b) die Beziehung (4-5b).

Bei der Ableitung von (4-5a) hat man zu beachten, daß über die Wandstärke in radialer Richtung ein Geschwindigkeitsgradient herrscht, auch wenn die Wand noch so dünn ist. Ändert sich der mittlere Radius $R = (a+b)/2$ mit der Geschwindigkeit \bar{v}_r , so bewegt sich - wenn sich das Rohr aufweitet - der innere Radius a etwas schneller und der äußere etwas langsamer als der mittlere, da ja mit der Expansion des Rohres eine Wandstärkeverminderung einhergeht und es somit eine Relativbewegung von innerer und äußerer Rohroberfläche aufeinander zu gibt. Über die Wandstärke s wird in 1. Näherung ein lineares Geschwindigkeitsprofil

$v_r = \bar{v}_r + 2 \cdot \Delta v_r \cdot \frac{\xi}{s}$ ($-\frac{s}{2} \leq \xi \leq \frac{s}{2}$) mit einem Geschwindigkeitsgradienten $\frac{1}{s} \cdot \Delta v_r$ herrschen. In der kleinen Zeitspanne Δt bewirkt nun die Relativbewegung von Innen- und Außenradius eine Wandstärkenabnahme $\Delta s = (v_r(+\frac{s}{2}) - v_r(-\frac{s}{2})) \cdot \Delta t = \Delta v_r \cdot \Delta t$, so daß $\Delta v_r = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ ist. Somit gilt also $D_z \approx \frac{1}{s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t}$, was im Grenzfall $\Delta t \rightarrow 0$ zu (4-5a) führt.

Zusammen mit (4-4a,b) liefern (4-5a,b) 2 gekoppelte Differentialgleichungen für R und s.

$$\dot{s} = - \left(\frac{1}{\sigma_c} \right)^n \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{\Delta p \cdot R}{s} \right)^2 + \left(\frac{F_{ex}}{2\pi R s} \right)^2 \right)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot \Delta p \cdot R + \frac{F_{ex}}{4\pi R} \right) \quad (4-6a)$$

$$\dot{R} = \left(\frac{1}{\sigma_c} \right)^n \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{\Delta p \cdot R}{s} \right)^2 + \left(\frac{F_{ex}}{2\pi R s} \right)^2 \right)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot \Delta p \cdot \frac{R^2}{s} - \frac{F_{ex}}{4\pi s} \right) \quad (4-6b)$$

Eine Lösung dieses nichtlinearen Systems ist im allgemeinen nur mit numerischen Methoden möglich..

4.1.1 Analytische Behandlung der Fälle 'reine Zugbelastung' und 'reiner Innendruck' mit der Näherungsmethode

Ebenso wie im Rahmen der exakten Rechnungen können die beiden Fälle 'reiner Innendruck' sowie 'reine Zugbelastung' einer analytischen Behandlung unterworfen werden.

Für den Innendruckfall liefert (4-6a) und (4-6b) das folgende Gleichungssystem

$$\dot{s} = - \left(\frac{1}{\sigma_c} \right)^n \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\Delta p \cdot R}{s} \right)^n \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot s \quad (4-7a)$$

$$\dot{R} = \left(\frac{1}{\sigma_c} \right)^n \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\Delta p \cdot R}{s} \right)^n \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot R \quad (4-7b)$$

Geht man zu der Variablen $\mu = s/R$ über, so kann man die Gleichungen (4-7a,b) zu der folgenden Differentialgleichung für μ synthetisieren, die die zeitliche Entwicklung der Rohrgeometrie charakterisiert:

$$\dot{\mu} = - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\Delta p}{\sigma_c} \right)^n \cdot \sqrt{3} \cdot \left(\frac{1}{\mu} \right)^{n-1} \quad (4-8)$$

Daraus leitet sich die folgende Versagenszeit ab ($\mu_0 = s_0/R_0 =$ Verhältnis der Ausgangswerte von Wandstärke und Radius).

$$T = \left(\frac{\sigma_c}{\Delta p} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \int_0^{\mu_0} \mu^{n-1} \cdot d\mu \quad (4-9a)$$

bzw. ausgewertet

$$T = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{\sigma_c}{\sigma_{t0}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^n \cdot \frac{1}{n} \quad (4-9b)$$

mit $\sigma_{to} = \Delta p \cdot \frac{R_o}{s_o}$.

Setzt man die Bedingungen und Stoffwerte des Rechenfalls 1 ein ($\Delta p = 5,249 \text{ N/mm}^2$, $R_o = 55 \text{ mm}$, $s_o = 10 \text{ mm}$, $\sigma_c = 69,25 \text{ N/mm}^2$, $n = 8,3$), so erhält man für T: $T = 327,1 \text{ [h]}$.

Der Vergleich mit dem in Abschnitt 3.2.1 abgeleiteten Versagenszeitpunkt zeigt, daß die Näherungsrechnung einen um 2 % kleineren Wert liefert.

Bei reiner Zugbelastung erhält man die beiden folgenden Differentialgleichungen für R und s

$$\dot{s} = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{F_{ex}}{2\pi R s \sigma_c} \right)^n \cdot s \quad (4-10a)$$

$$\dot{R} = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{F_{ex}}{2\pi R s \sigma_c} \right)^n \cdot R \quad (4-10b)$$

Führt man die Variable $v = R \cdot s$ ein, so lassen sich (4-10a,b) zu der folgenden Differentialgleichung zusammenfassen,

$$\dot{v} = -\left(\frac{F_{ex}}{2\pi \sigma_c} \right)^n \cdot \left(\frac{1}{v} \right)^{n-1} \quad (4-11)$$

die praktisch auf die gleiche Versagenszeit führt wie die Betrachtungen des Kap. 3.2.2 (Gl. 3-32). Lediglich die Berechnung der Rohrringfläche wird im Rahmen des Näherungsverfahrens durch die Näherungsformel $2 \cdot \pi \cdot R \cdot s$ vorgenommen statt mit dem exakten Ausdruck $\pi \cdot (b^2 - a^2)$ (d.h. $\sigma_{nom} = \frac{F_{ex}}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot s}$).

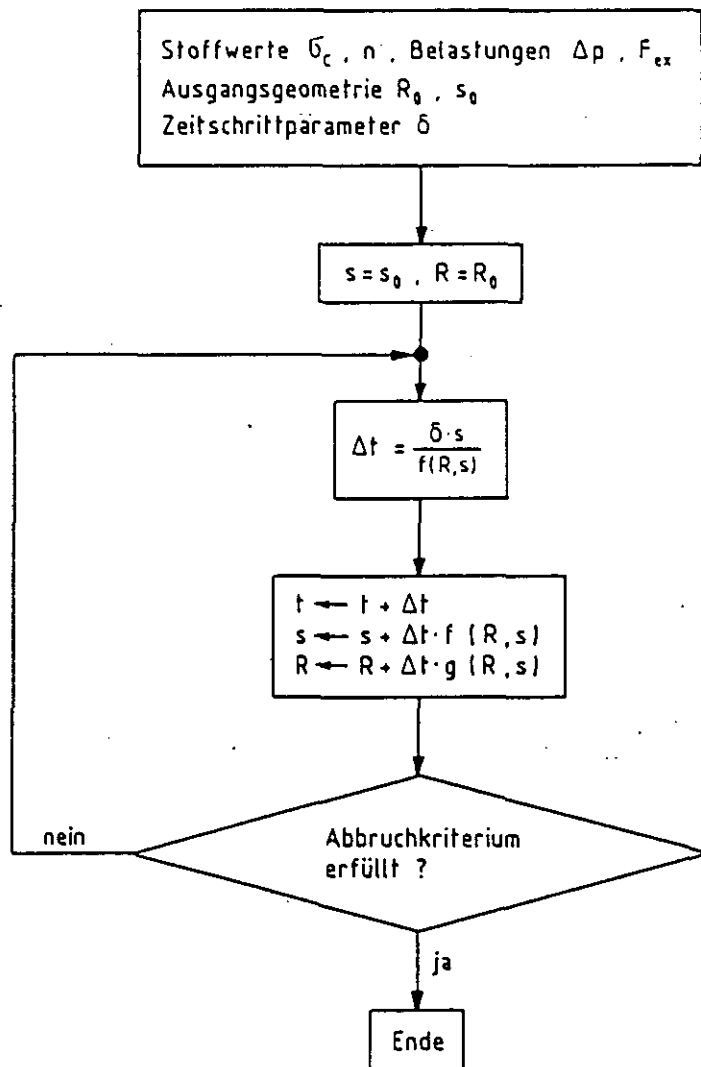
4.1.2 Numerische Auswertung mit Euler-Cauchy-Verfahren

Die einfachste numerische Methode zur Auswertung von (4-6) ist das Euler-Cauchy'sche Vorwärtsverfahren. Bezeichnet man die Rechthandseiten von (4-6a) und (4-6b) mit $f(R,s)$ und $g(R,s)$, so beinhaltet das Verfahren den folgenden Algorithmus

$$s_{i+1} = s_i + \Delta t \cdot f(R_i, s_i) \quad (4-12a)$$

$$R_{i+1} = R_i + \Delta t \cdot g(R_i, s_i) \quad (4-12b)$$

R_i, s_i sind hierbei die Werte von Radius und Wandstärke zum Zeitpunkt t_i , R_{i+1} und s_{i+1} die zum benachbarten Zeitpunkt $t_{i+1} = t_i + \Delta t$. Bei einer numerischen Auswertung mit Gleichungen (4-12 a,b) ist aus Stabilitätsgründen besondere Aufmerksamkeit der Wahl des Zeitschritts Δt zu widmen. Es ist hier deshalb eine Zeitschrittsteuerung zu empfehlen, wie es auch am Ende des Abschnitts 3.2 ausgeführt ist. Statt der Vorgabe eines unabhängigen Δt geht man dabei von einer vorgegebenen Abnahme der Wandstärke von Zeitpunkt zu Zeitpunkt aus - charakterisiert durch eine Größe $\delta = (s_{i+1} - s_i)/s_i$ - und macht damit Δt zu einer abhängigen Größe. Das folgende Flußdiagramm zeigt die Berechnungsmethode unter Voraussetzung konstanter Belastung.



Flußdiagramm 2

4.1.3 Numerische Auswertung mit dem Runge-Kutta-Verfahren

Erheblich bessere Resultate als mit dem Euler-Cauchy-Verfahren erzielt man selbst bei größerem Zeitraster bei Verwendung von Integrationsverfahren höherer Ordnung, wie es die numerische Runge-Kutta-Lösungsmethode darstellt /13/. Der Algorithmus zur Berechnung von s_{i+1} und R_{i+1} zur Zeit $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ auf Basis der Werte s_i , R_i zum Zeitpunkt t_i ist im folgenden angegeben:

$$t_{i+1} = t_i + \Delta t \quad (4-13a)$$

$$s_{i+1} = s_i + k_s \quad (4-13b)$$

$$R_{i+1} = R_i + k_R \quad (4-13c)$$

wobei

$$k_s = \frac{1}{6} \cdot (k_{Is} + 2 \cdot (k_{IIs} + k_{IIIs}) + k_{IVs}) \quad (4-13d)$$

$$k_R = \frac{1}{6} \cdot (k_{IR} + 2 \cdot (k_{IIR} + k_{IIIR}) + k_{IVR}) \quad (4-13e)$$

und

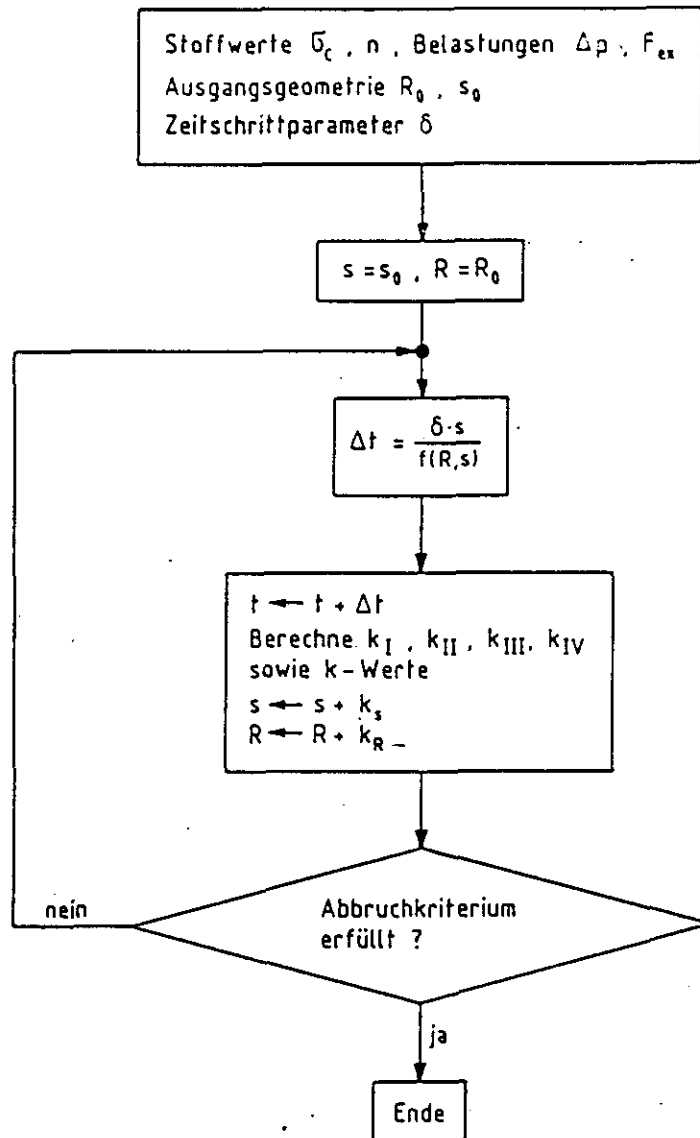
$$k_{Is} = \Delta t \cdot f(R_i, s_i) \quad k_{IR} = \Delta t \cdot g(R_i, s_i) \quad (4-13f)$$

$$k_{IIs} = \Delta t \cdot f\left(R_i + \frac{1}{2} k_{IR}, s_i + \frac{1}{2} k_{Is}\right) \quad k_{IIR} = \Delta t \cdot g\left(R_i + \frac{1}{2} k_{IR}, s_i + \frac{1}{2} k_{Is}\right) \quad (4-13g)$$

$$k_{IIIs} = \Delta t \cdot f\left(R_i + \frac{1}{2} k_{IIR}, s_i + \frac{1}{2} k_{II s}\right) \quad k_{IIIR} = \Delta t \cdot g\left(R_i + \frac{1}{2} k_{IIR}, s_i + \frac{1}{2} k_{II s}\right) \quad (4-13h)$$

$$k_{IVs} = \Delta t \cdot f(R_i + k_{IIIR}, s_i + k_{III s}) \quad k_{IVR} = \Delta t \cdot g(R_i + k_{IIIR}, s_i + k_{III s}) \quad (4-13i)$$

Auch hier sollte man Δt an die Wandstärkeabnahme koppeln. Hierbei wird Δt wie beim Vorwärtsverfahren errechnet. Sodann werden Wandstärke und Radius über die Formeln (4-13) ermittelt. Das Flußdiagramm, das den Ablauf der Rechnung verdeutlicht, ist in seiner Struktur ähnlich dem eben Angegebenen.



Flußdiagramm 3

Der Rechenaufwand des Runge-Kutta-Verfahrens innerhalb eines Zeitschritts ist zwar erheblich größer als beim einfachen Vorwärtsverfahren, jedoch wiegt die Möglichkeit der Wahl eines größeren Zeitrasters bei vergleichbarer Genauigkeit diesen Nachteil auf.

4.2 Beispielhafte numerische Untersuchungen mittels des Näherungsverfahrens

Die in Abschnitt 3.2.3 behandelten Lastkombinationen wurden zum Vergleich mit den eben beschriebenen Näherungsverfahren durchgerechnet. Es wurden dabei sowohl Rechnungen mit dem Vorwärtsverfahren als auch mit der Methode nach Runge-Kutta ausgeführt. Die in den Abb. 13-18 präsentierten Kurven wurden mit dem Runge-Kutta-Verfahren gewonnen, wobei der Zeitschritt so gesteuert wurde, daß die Wandstärke innerhalb eines Zeitintervalls um ungefähr 1 % abnahm.

Was den zeitlichen Verlauf der geometrischen Größen anbelangt (Abb. 13,14,15), so stellt man ein qualitativ und praktisch auch quantitativ gleiches Verhalten wie in den Abb. 4,5,6 fest. Es fällt lediglich auf, daß für die ohnehin fast zusammenliegenden Versagenszeitpunkte der Rechenfälle 5 und 7 das Näherungsverfahren im Falle 7 den kleineren Wert liefert, während es sich bei dem exakten Verfahren umgekehrt verhält. Ein Blick auf Tab. II - vergleiche 'Runge-Kutta Verfahren $\delta = 0,01$ ' und 'Exaktes kontinuumsmechanisches Verfahren $\delta = 0,0005$ ' - zeigt die leichten Unterschiede in den Versagenszeitpunkten, die maximal bei etwas über 2 % liegen. Was die Spannungen anbelangt, so liefert das Näherungsverfahren natürlich für jede Spannungs-Komponente nur einen einzigen Wert innerhalb der Wandung, während im exakten Verfahren die Variation der Spannungen über die Wand errechnet wird. Ein Vergleich der mit der exakten Methode ermittelten Tangential- und Axialspannungen (Abb. 9,10,11,12) mit den entsprechenden Kurven des Näherungsverfahrens zeigt, daß die genähereten Spannungen praktisch den Maximalwerten der exakten Methode entsprechen bzw. teilweise größer sind. So ist beispielsweise beim Rechenfall 1 zur Zeit $t=0$ die tangentielle Spannung an der äußeren Rohroberfläche etwa 28 N/mm^2 (Abb. 10), die auf der inneren liegt unter 25 N/mm^2 (Abb. 9). Der Näherungswert (Abb. 17) liegt etwas über 28 N/mm^2 .

Die Tabelle II zeigt, daß die berechneten Versagenszeitpunkte ('duktils Auseinanderfließen') von exakten Verfahren und Näherungsverfahren für die gewählte Ausgangsrohrgeometrie (Innenradius 50 mm, Wandstärke 10 mm) recht gut übereinstimmen. Man

erkennt, daß zumindest für die hier behandelten 'dickwandigen' Rohre das erheblich einfacher handhabbare Näherungsverfahren hinreichend genaue Informationen über die Entwicklung von Spannungen und Verformungen liefert.

Die Tabelle weist auch aus, daß das Runge-Kutta-Verfahren dem Cauchy-Euler'schen Vorwärtsverfahren deutlich überlegen ist. Um Versagenszeitpunkte vergleichbarer Güte zu erhalten, muß man beim C.E.-Verfahren ein Zeitraster wählen, das um mindestens eine Größenordnung feiner strukturiert ist.

SCHLUSSBEMERKUNGEN

In dieser Arbeit wurden Berechnungsverfahren für Rohre, die bei hohen Temperaturen unter Innendruck und zusätzlicher Axiallast im Kriechbereich betrieben werden, unter Berücksichtigung grosser Verformungen dargestellt.

Als Stoffgesetz diente ein einfach strukturiertes nichtlineares Fließgesetz (Norton'scher Potenzansatz für Kriechen). Es wurden sowohl die exakten kontinuumsmechanischen Methoden als auch einfache Näherungsverfahren eingesetzt. Soweit es möglich war, wurde auf analytischer Basis gerechnet. Numerische Verfahren wurden erst nach durchgeführten analytischen Umformungen und Kondensationsprozessen zur Anwendung gebracht.

Beispielrechnungen für dickwandige Reformerrohre ($\varnothing = 100$ mm, Wandstärke = 10 mm) zeigen, daß die Entwicklung von Spannungs- und Verformungszuständen für die hier zugrunde gelegte Geometrie in zufriedenstellender Weise durch die Näherungsrechnung charakterisiert werden kann.

LITERATURVERZEICHNIS

- /1 / Boltendahl, M.; Harth, R.
Projekt ADAM und EVA: Wärmetransport auf kaltem Wege,
Bild der Wissenschaft, 4, 1980
- /2 / Rödiger, M. et al.
Untersuchungen an Rohrproben aus INCOLOY 800 H bei einachsiger und mehrachsiger Beanspruchung,
Jül-1979, Februar 1985
- /3 / Odquist, F.K.G.
Mathematical Theory of Creep and Creep Rupture,
2. Ausgabe, Oxford University Press, 1974
- /4 / Rabotnov, Y.N.
Creep Problems in Structural Members,
North Holland Publishing Company, Amsterdam 1969
- /5 / Betten, J.
Zur Verallgemeinerung der Invariantentheorie in der Kriechmechanik, Rheol. Acta 14, 715-720 (1975)
- /6 / Becker, E.; Bürger, W.
Kontinuumsmechanik,
B.G. Teubner, Stuttgart, 1975
- /7 / Malvern, L.E.
Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium,
Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1969
- /8 / Truesdell, C.; Noll, W.
The Nonlinear Field Theories of Mechanics in: S. Flügge,
ed. Handbuch der Physik, Voll. III/3, Springer, Berlin,
1965
- /9 / Green, A.E.; Zerna, W.
Theoretical Elasticity,
Oxford University Press, Oxford, 1968
- /10/ Prager, W.
Einführung in die Kontinuumsmechanik,
Birkhäuser Verlag, Basel, 1961
- /11/ Prager, W.
An Elementary Discussion of Definitions of Stress Rate
Quart. Appl. Math. 18, 403-407 (1961)
- /12/ Sommerfeld, A.
Mechanik der deformierbaren Medien
6. Auflage, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1970
- /13/ Engeln-Müller, G.; Reutter, F.
Numerische Mathematik für Ingenieure, 4. Auflage,
BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1985

Liste der wichtigsten verwendeten Symbole

a:	Rohrinnenradius [m]
b:	Rohraußenradius [m]
c:	Parameter des Kriechgeschwindigkeitsfeldes $[m^2/h]$
C_{ijkl} :	Tensorkomponenten im Stoffgesetz (Kriechen) $[m^2/MN/h]$
$\dot{\epsilon}_{ij}, \dot{\epsilon}_r$ etc:	Verzerrungsgeschwindigkeit $[h^{-1}]$
D_e :	Vergleichsgröße der Verzerrungsgeschwindigkeit $[h^{-1}]$
E:	Elastizitätsmodul $[MN/m^2]$
F:	Gesamte Axialkraft (Druckeinfluß mitberücksichtigt) $[MN]$
F_{ex} :	Axialkraft ohne druckinduzierte Anteile $[MN]$
H_{ijkl} :	Tensorkomponenten im Stoffgesetz Elastisches Verhalten $[m^2/MN]$
k_s, k_p :	Größen im Runge-Kutta-Verfahren -
k:	Konstante im Norton'schen Stoffgesetz $[(m^2/MN)^n] \cdot h^{-n}$
l:	Rohrlänge [m]
n:	Exponent im Norton'schen Stoffgesetz -
P_a :	Rohrinnendruck $[MN/m^2]$
P_b :	Rohraußendruck $[MN/m^2]$
Δp :	Druckdifferenz $P_a - P_b$ $[MN/m^2]$
r:	radiale Koordinate [m]
R:	mittlerer Rohrradius [m]
s:	Rohrwandstärke [m]
S_{ij}, S_r etc:	Komponenten des Spannungsdeviators $[MN/m^2]$
t:	Zeit [h]
T:	Versagenszeit [h]
u_i :	Verschiebungskomponente [m]
v_i, v_r etc:	Geschwindigkeitskomponente $[m/h]$
x_i :	Ortskoordinate [m]
z:	Ortskoordinate (zyl. Koor.-System) [m]
α :	Quadrat des Rohrinnenradius ($\alpha = a^2$) $[m^2]$
β :	Axiale Verzerrungsgeschwindigkeit $[h^{-1}]$
δ_{ij} :	Kroneckersymbol -
δ :	Relative Wandstärkenabnahme -

ϵ, ϵ_{ij} etc: Verzerrungskomponenten -
 ξ : Verhältnis Innen- zu Außenradius -
 θ : Winkelkoordinate (zyl. Koor.-System) -
 μ : Verhältnis Wandstärke - mittlerer Rohrradius -
 ν : Produkt Wandstärke - mittlerer Rohrradius $[m^2]$
 ϱ : radiale Koordinate $[m]$
 σ, σ_{ij} etc: Spannungskomponente $[MN/m^2]$

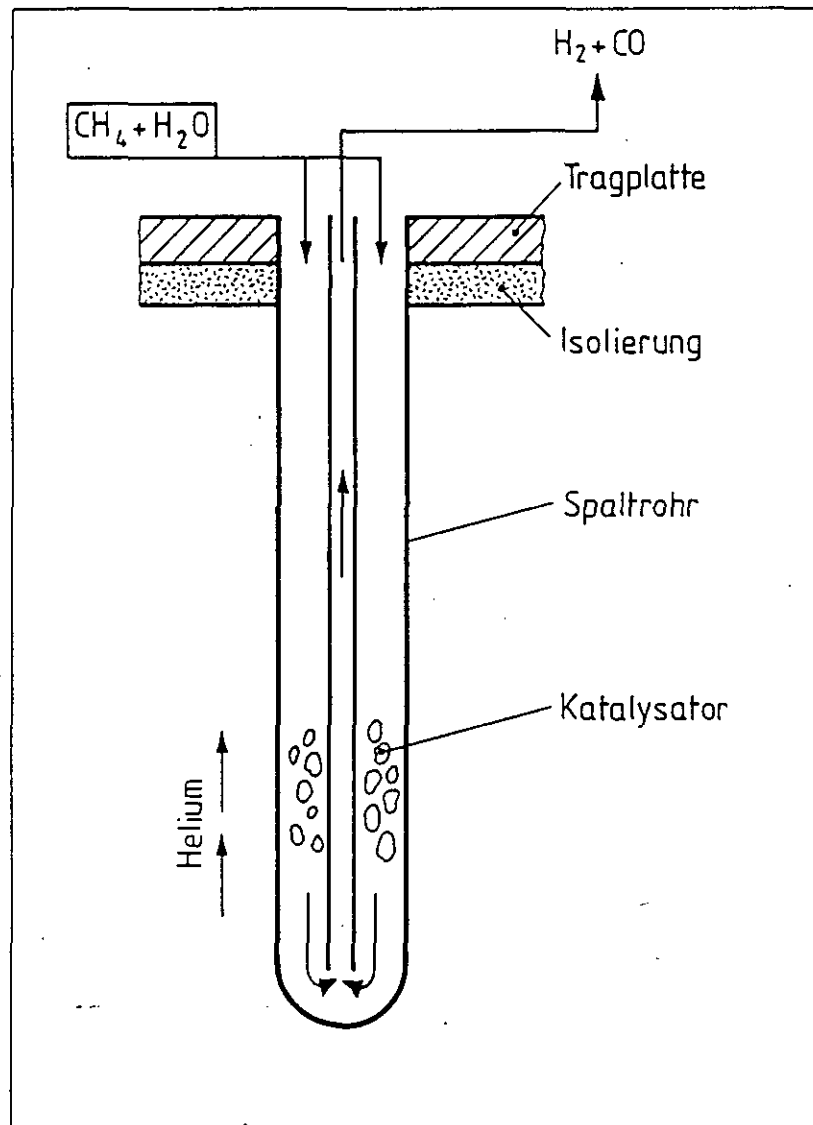


Abb. 1: Tauchrohr eines HTR-beheizten Röhrenspaltovens

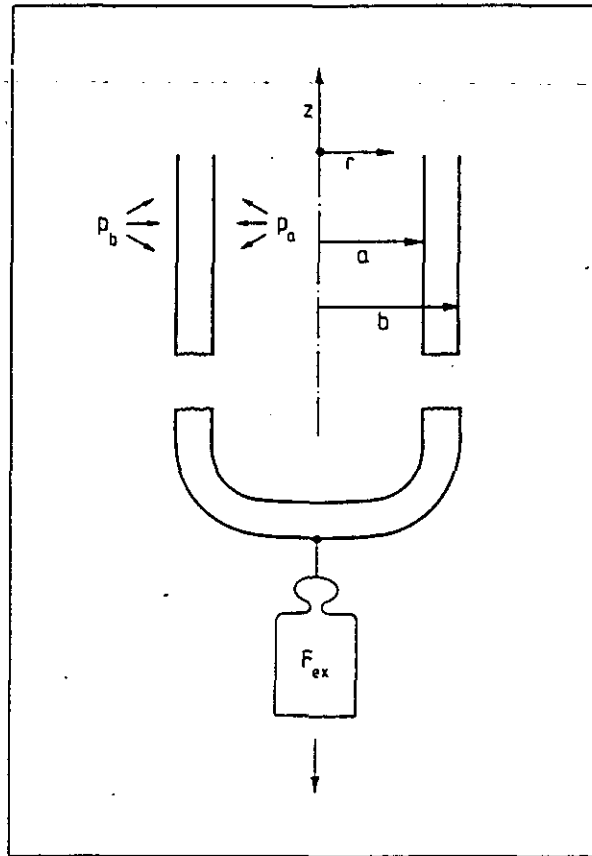


Abb. 2: Belastungssituation eines langen Rohres unter Innendruck, Außendruck und zusätzlichem axialem Zug.

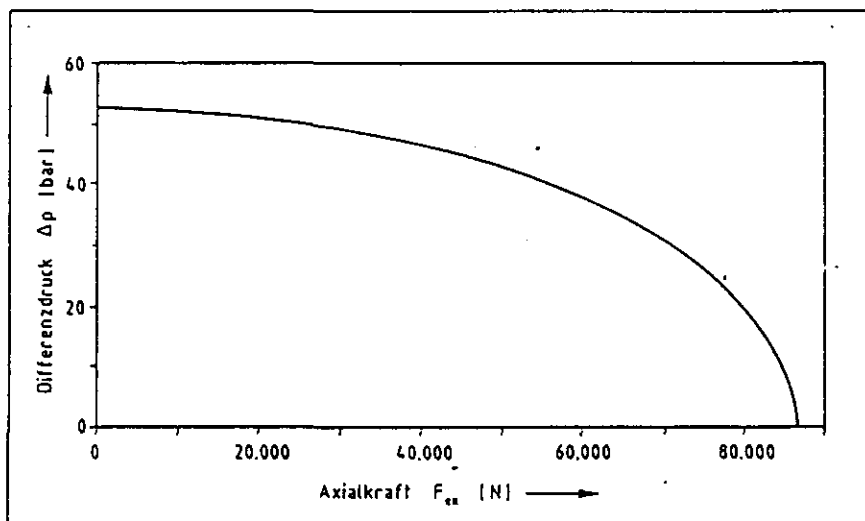


Abb. 3: Lastkombinationen von Druckdifferenz (Innendruck minus Außendruck) und zusätzlicher Axialkraft für eine von Mises Vergleichsspannung von 25 N/mm^2 (gerechnet mit den Näherungsformeln des Kapitels 4).

Rechenfall	Druckdifferenz [bar]	zusätzliche Axialkraft [N]
1	52,49	0,0
2	51,69	15 000,0
3	49,22	30 000,0
4	44,80	45 000,0
5	37,76	60 000,0
6	30,00	70 890,0
7	0,00	86 385,6

Tabelle I: Wertkombinationen der Druckdifferenz und zusätzlicher Axialkraft für 7 Rechenfälle.

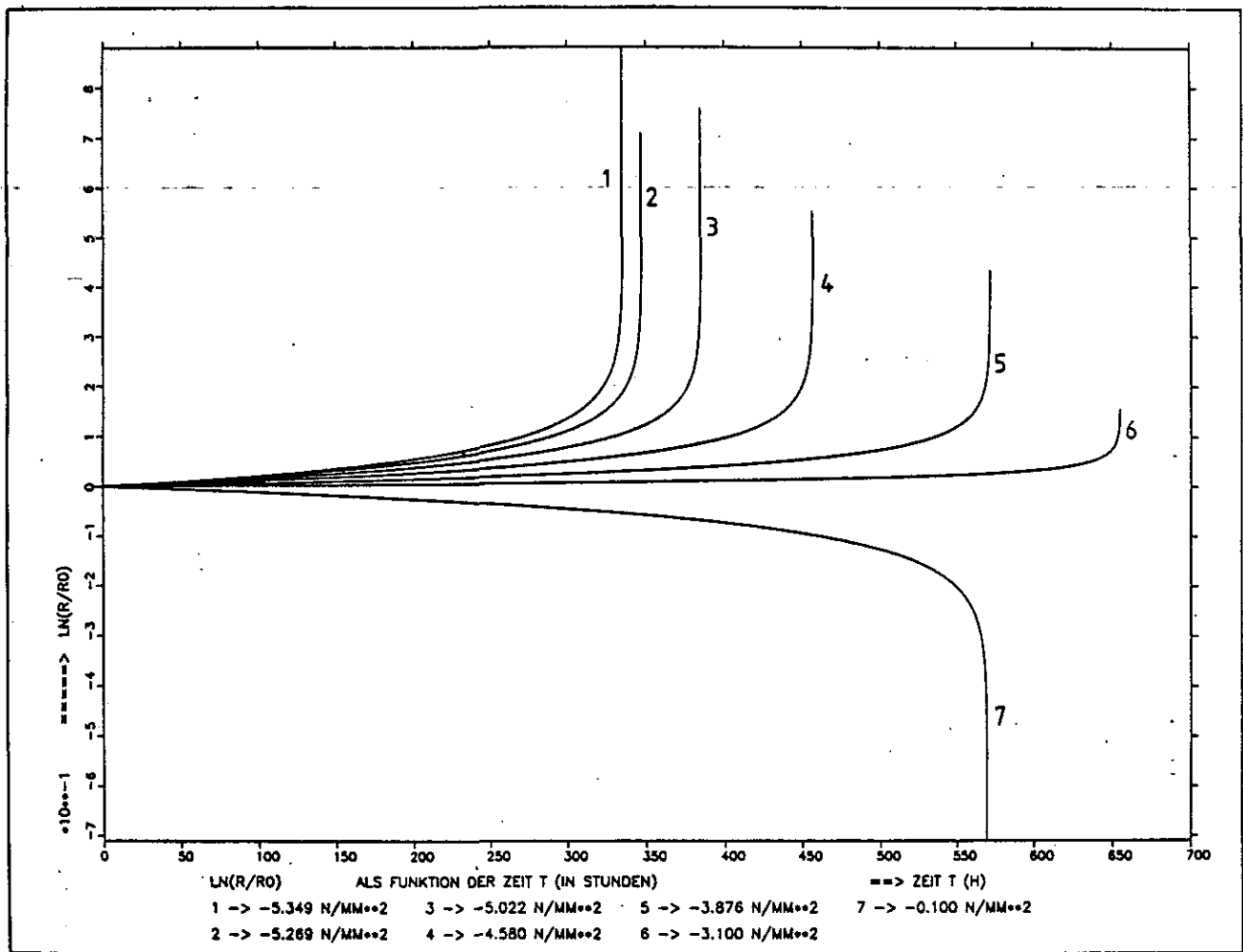


Abb. 4: Zeitliches Verhalten des mittleren Rohrradius R .
Aufgetragen ist für die 7 Rechenfälle die Größe $\ln(R/R_0)$.

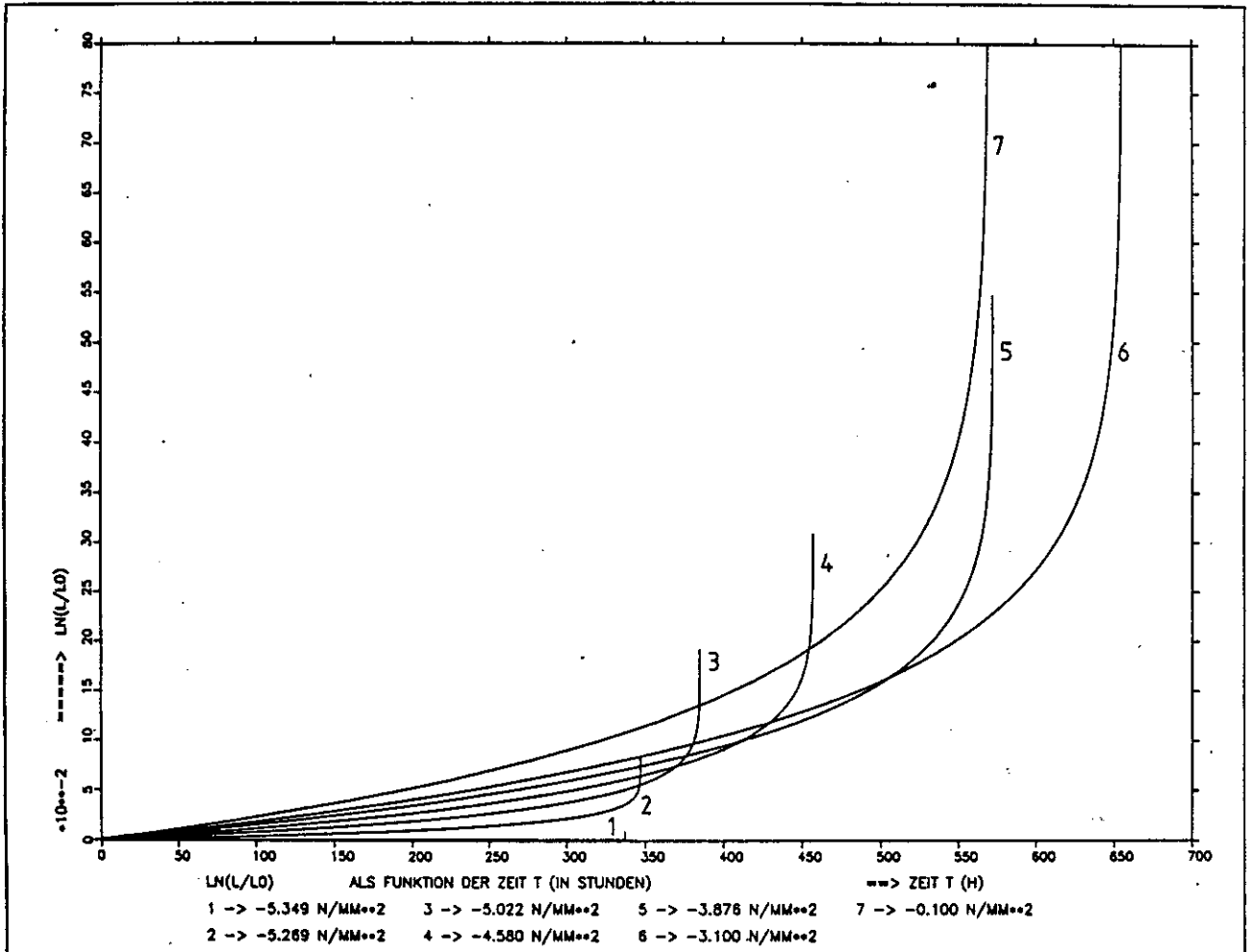


Abb. 5: Zeitliches Verhalten der axialen Dehnung, repräsentiert durch $\ln(L/L_0)$. Im Rechenfall 1 (reiner Innendruck) tritt keine axiale Verlängerung auf.

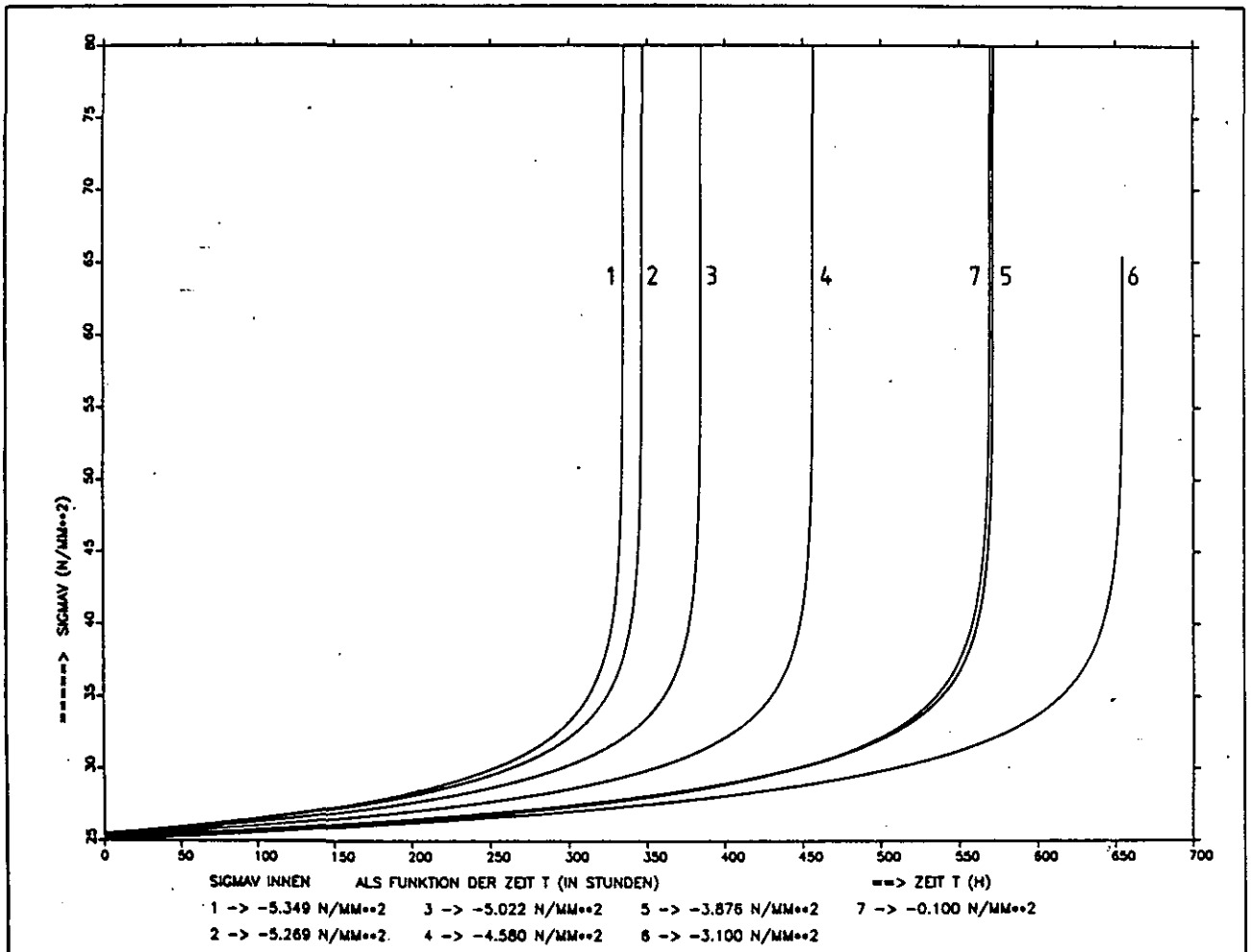


Abb. 7: von Mises Vergleichsspannung an der inneren Rohroberfläche als Funktion der Zeit für die 7 Rechenfälle.

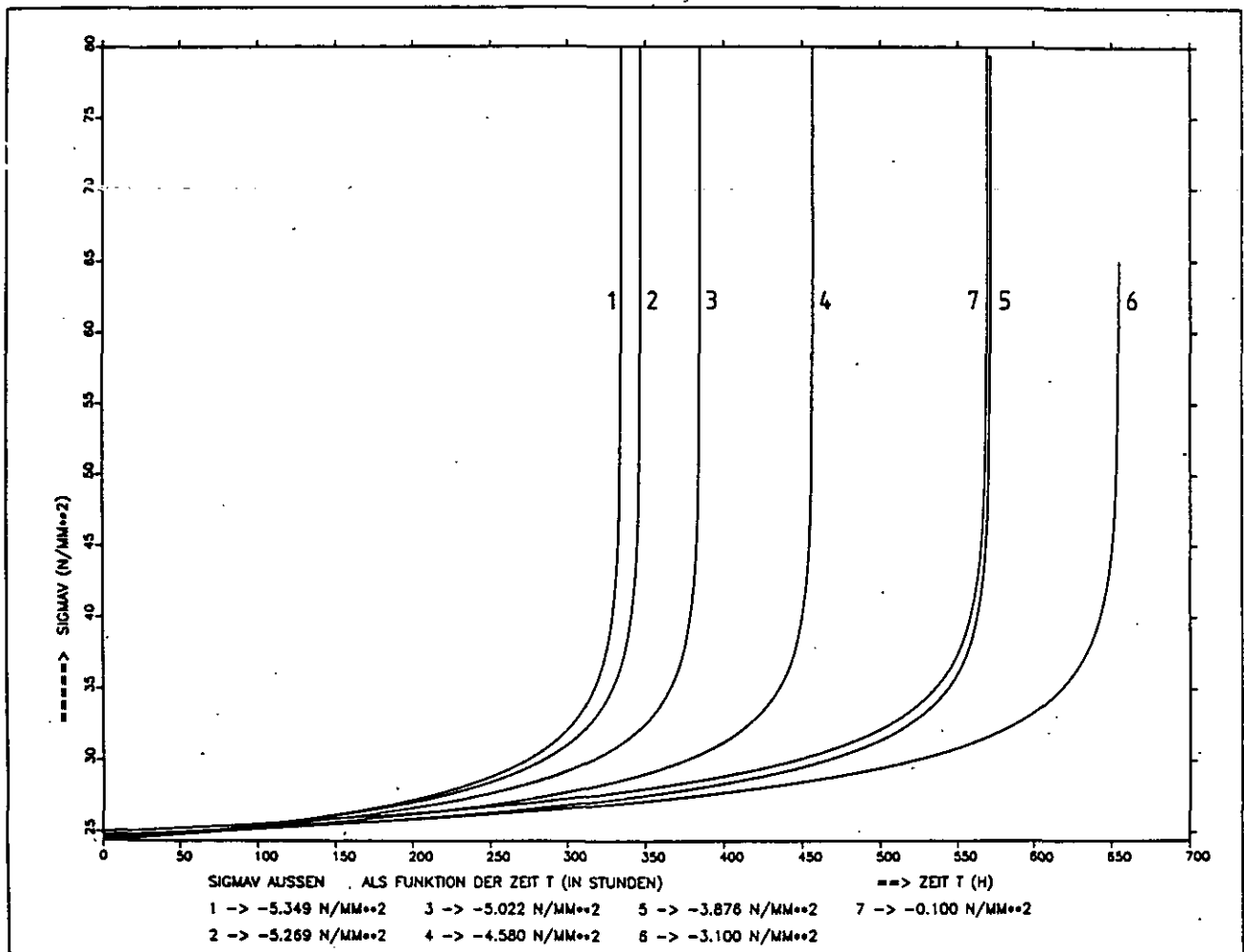


Abb. 8: von Mises Vergleichsspannung an der äußeren Rohroberfläche als Funktion der Zeit für die 7 Rechenfälle.

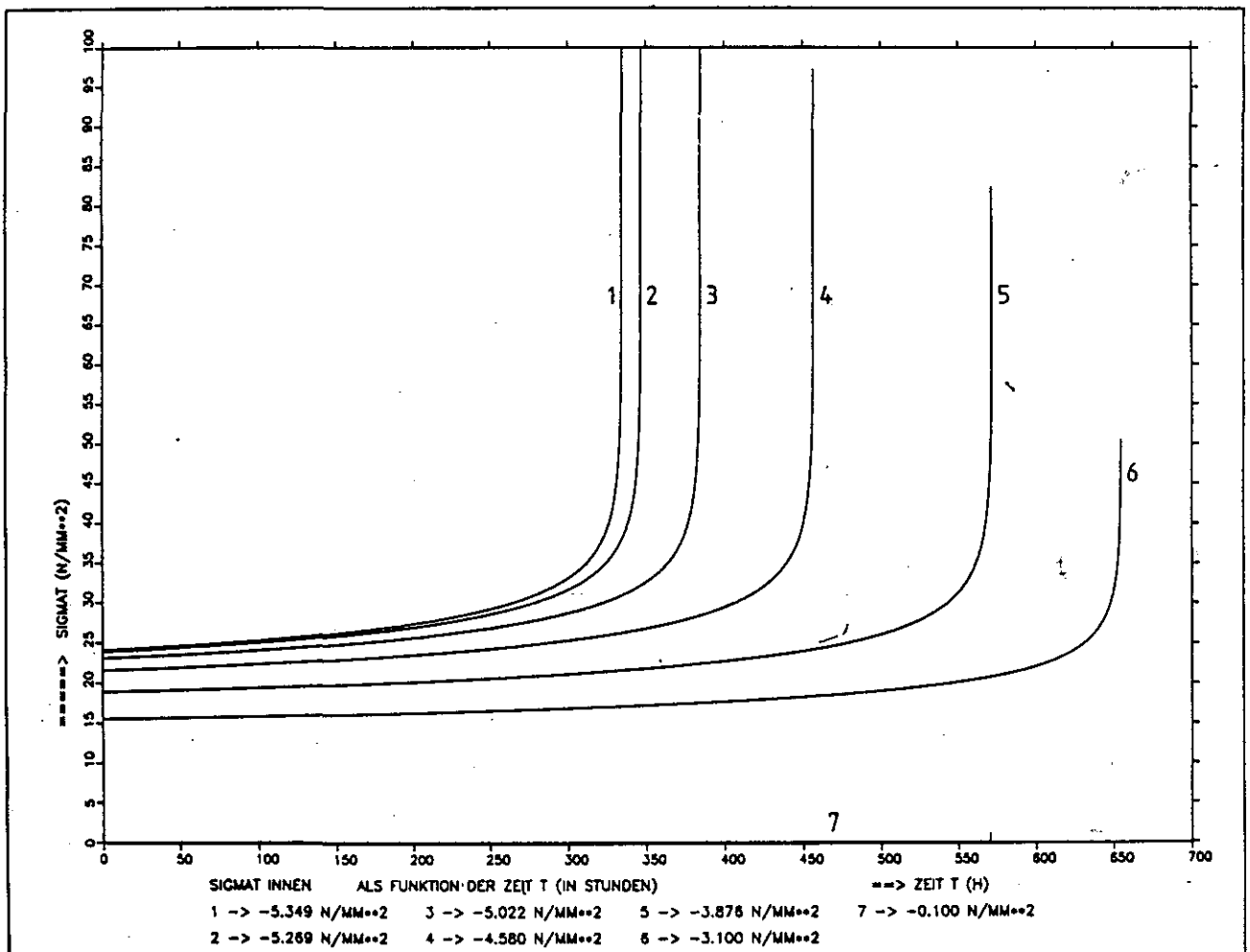


Abb. 9: Tangentialspannung an der inneren Rohroberfläche als Funktion der Zeit für die 7 Rechenfälle

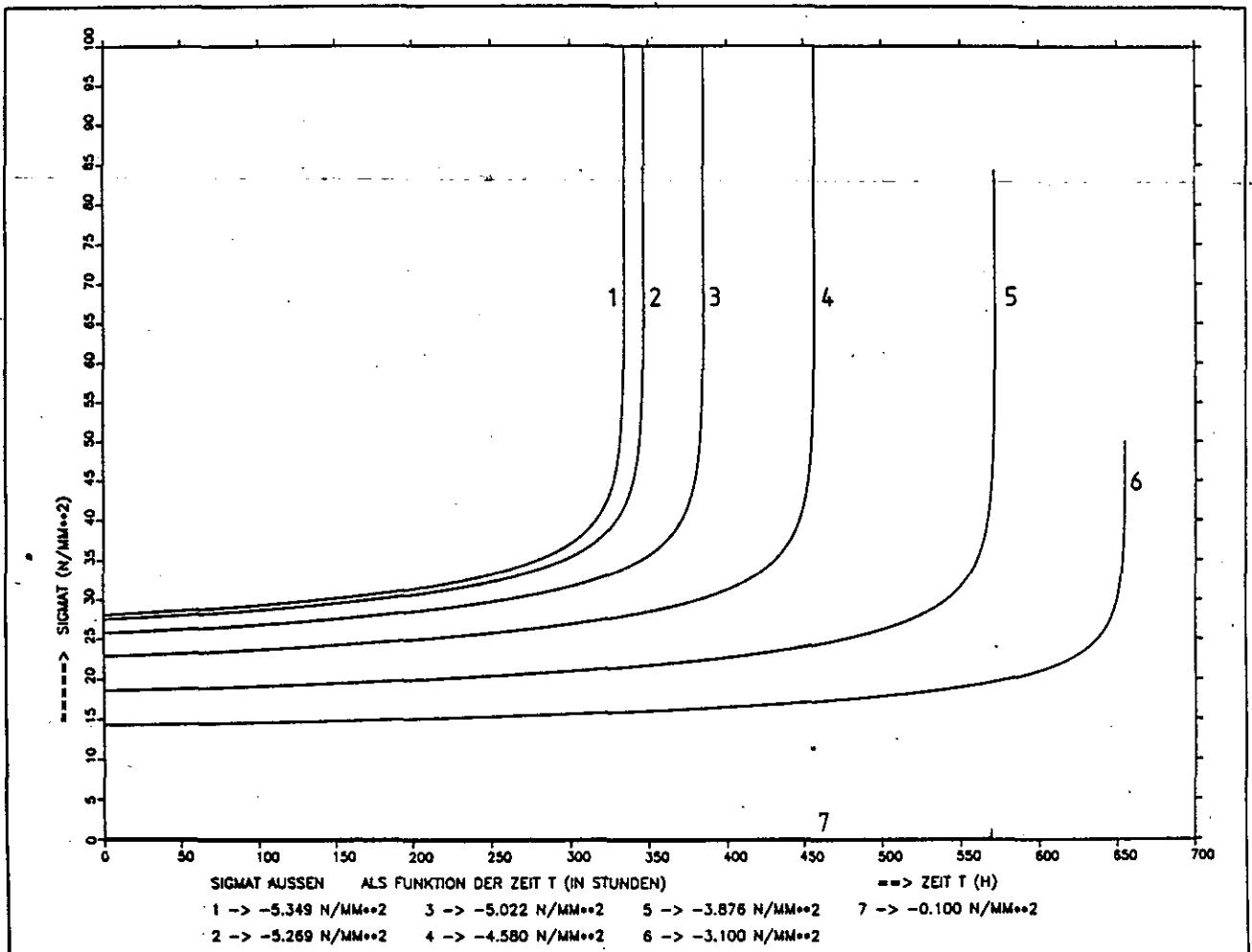


Abb. 10: Tangentialspannung an der äußeren Rohroberfläche als Funktion der Zeit für die 7 Rechenfälle.

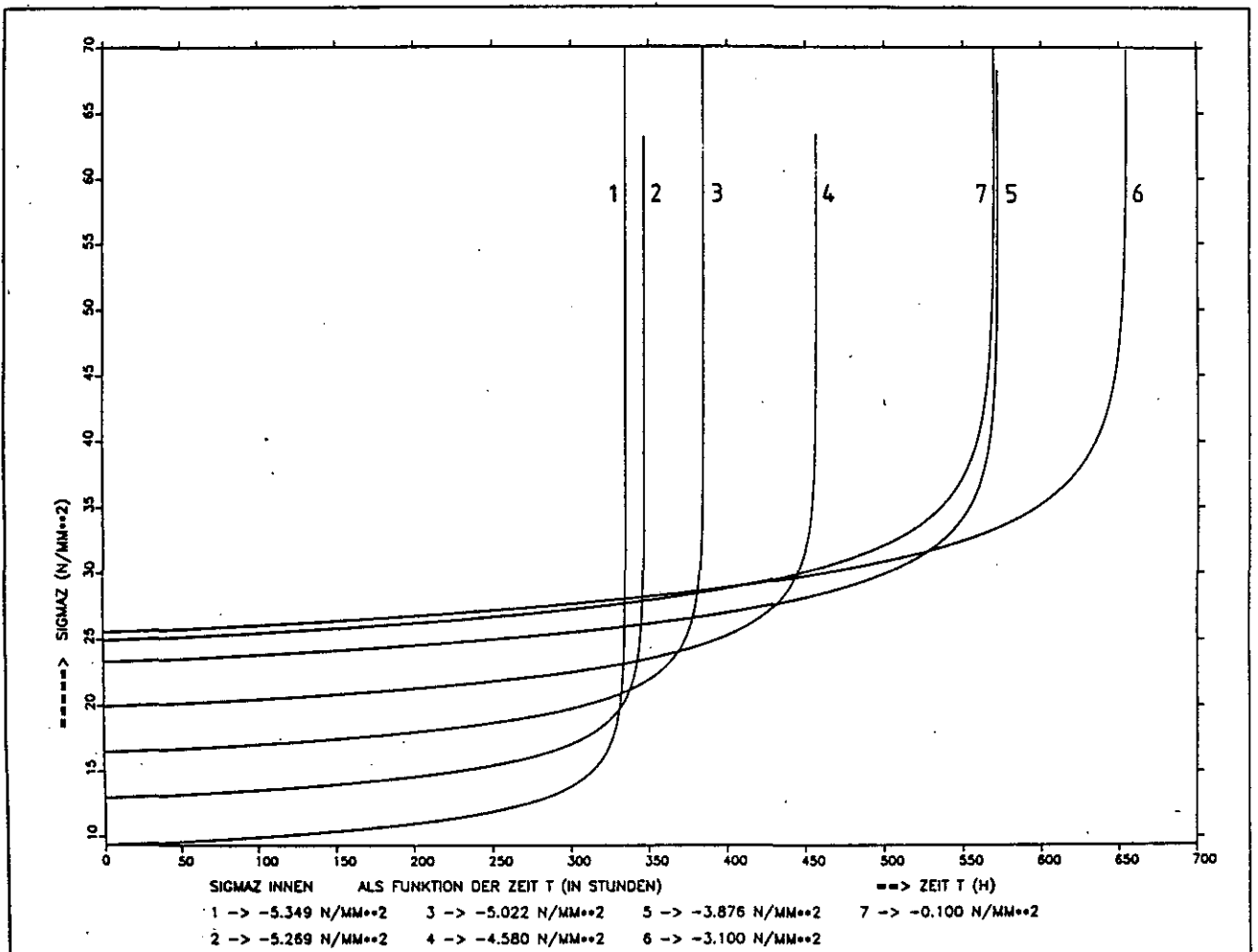


Abb. 11: Axialspannung an der inneren Rohroberfläche als Funktion der Zeit für die 7 Rechenfälle.

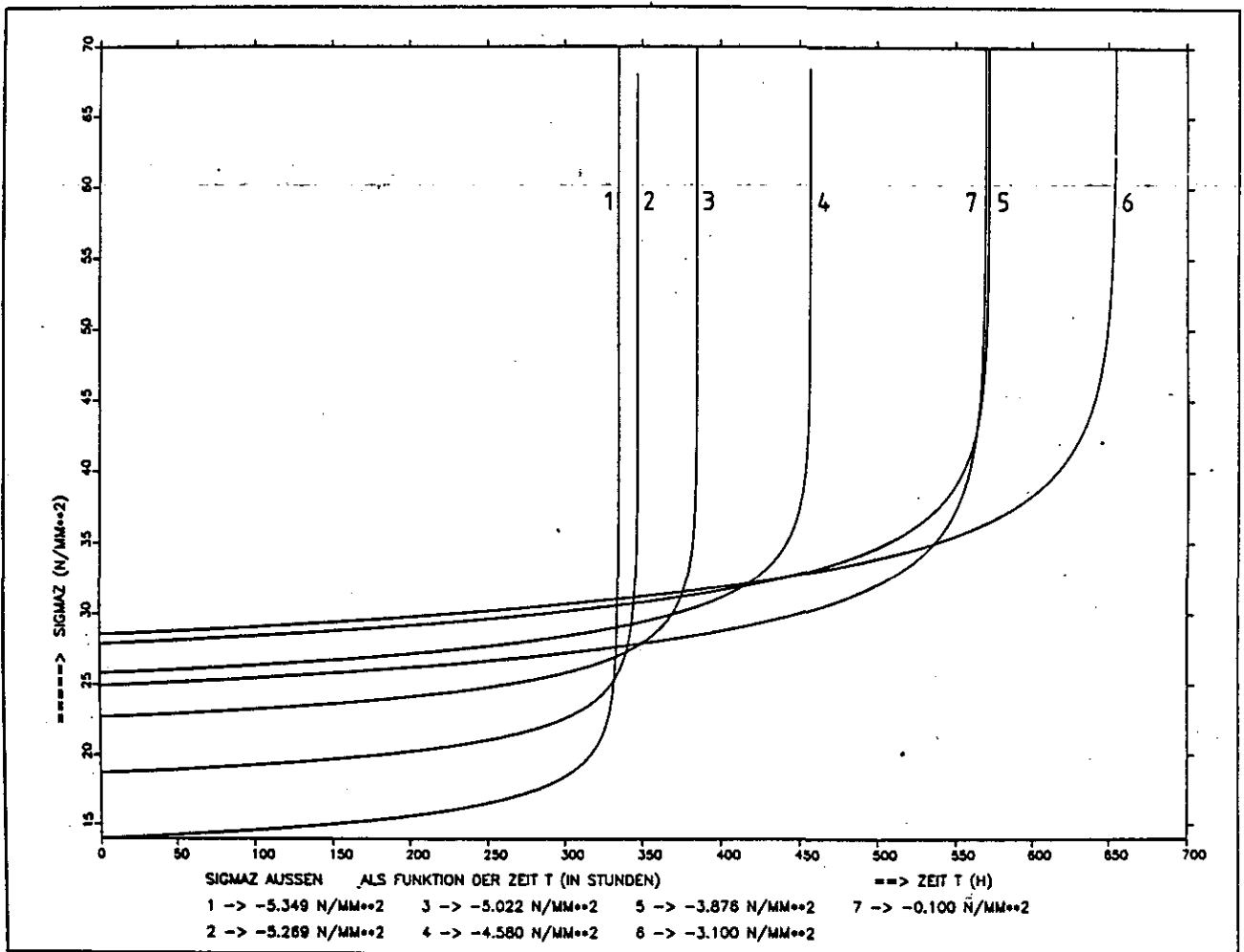


Abb. 12: Axialspannung an der äußeren Rohroberfläche als Funktion der Zeit für die 7 Rechenfälle.

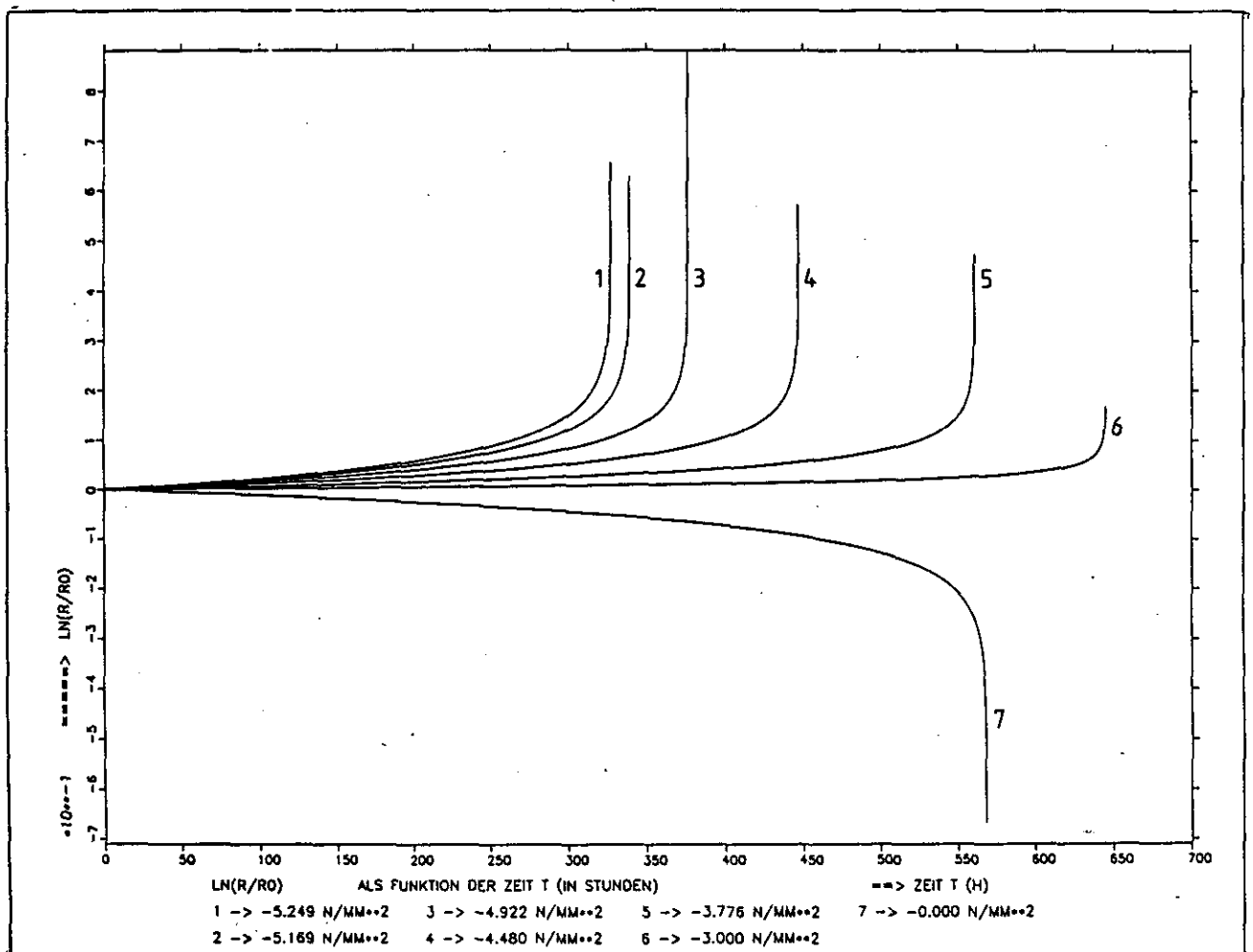


Abb. 13: Zeitliches Verhalten des mittleren Rohrradius, charakterisiert durch die Größe $\ln R/R_0$ (Näherungsverfahren), vergl. Abb. 4.

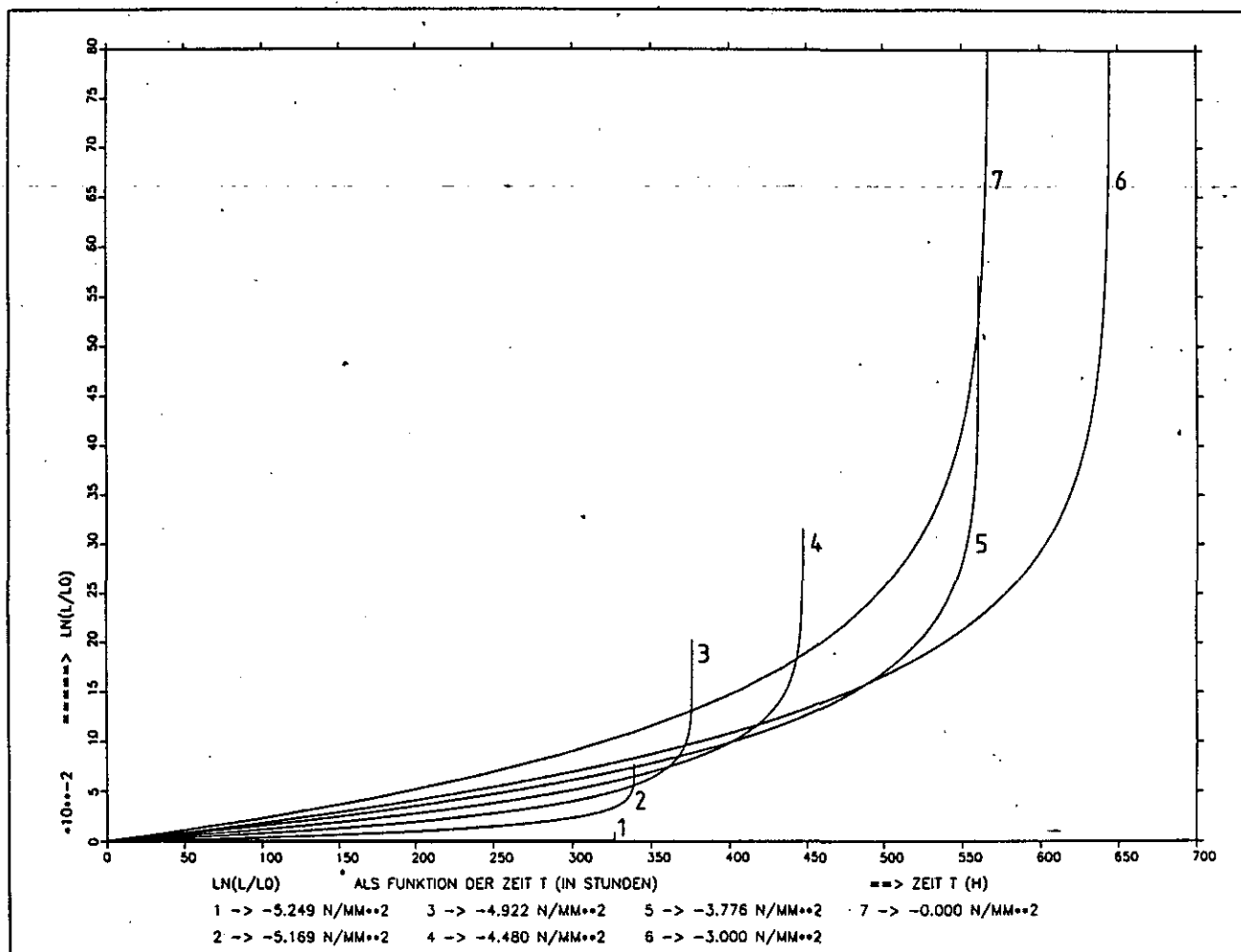


Abb. 14: Zeitliches Verhalten der axialen Dehnung (Näherungsverfahren),
vergl. Abb. 5.

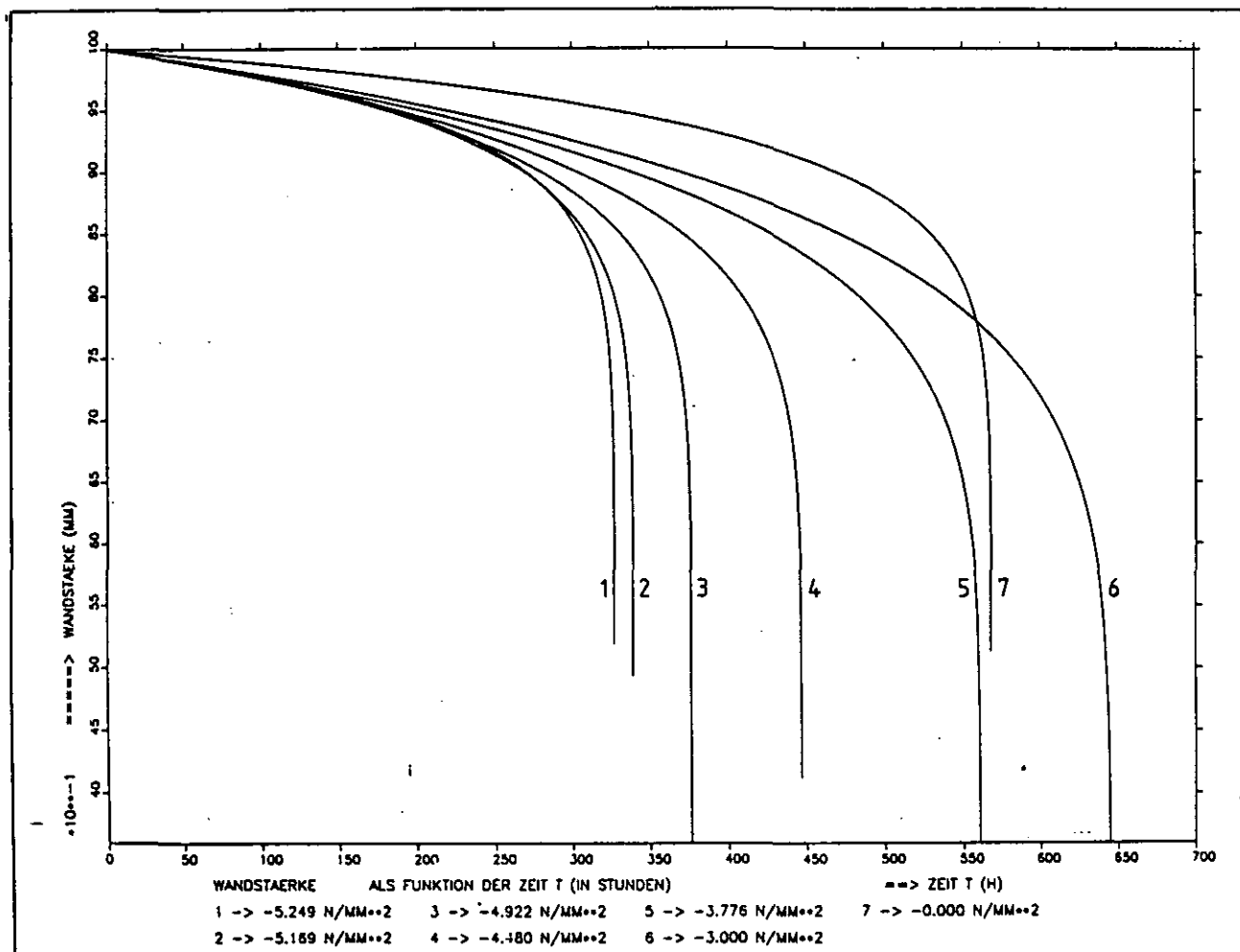


Abb. 15: Wandstärke als Funktion der Zeit (Näherungsverfahren), vergleiche Abb. 6.

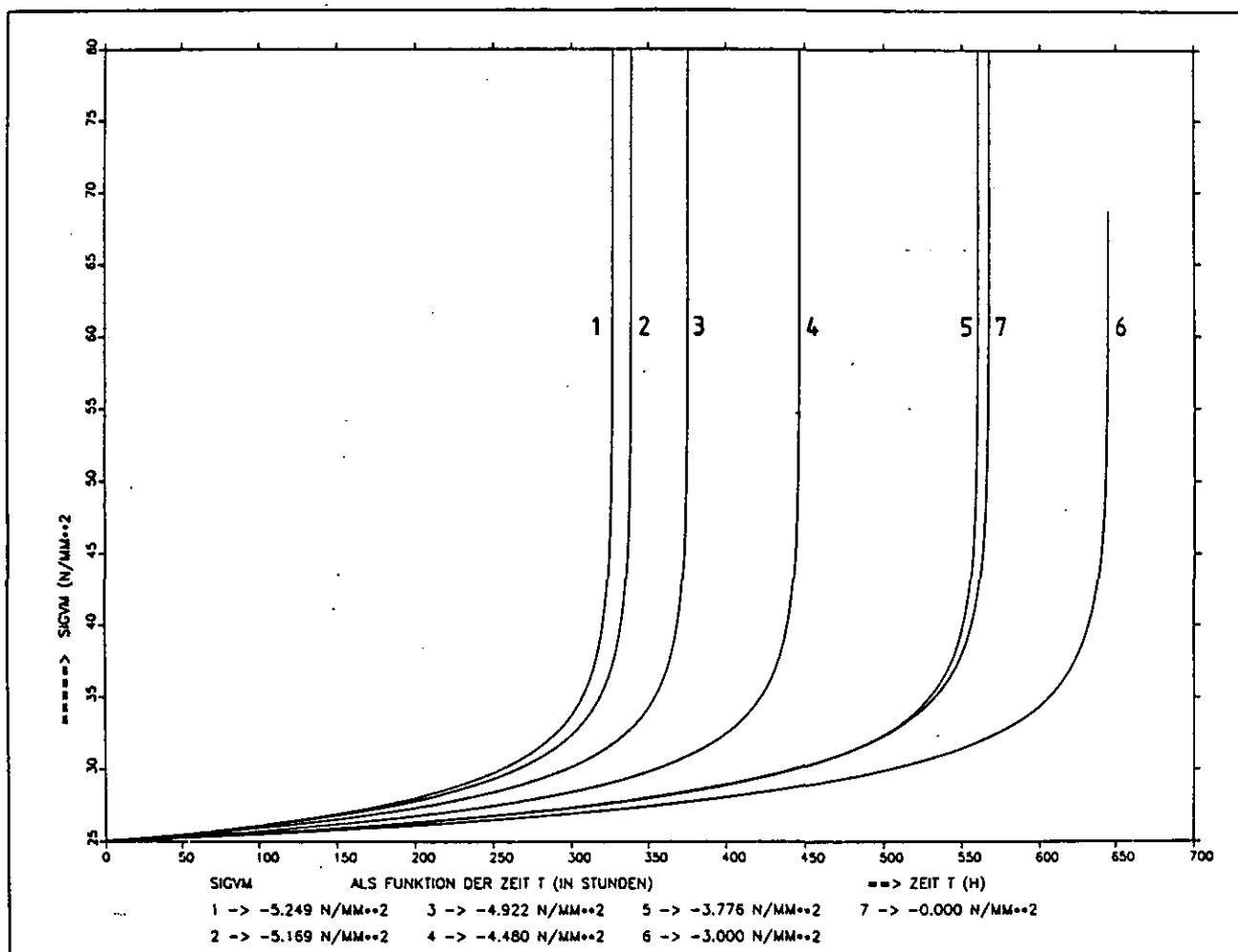


Abb. 16: von Mises Vergleichsspannung in der als dünne Membran aufgefaßten Rohrwandung als Funktion der Zeit. (Näherungsverfahren), vergl. Abb. 7 und 8.

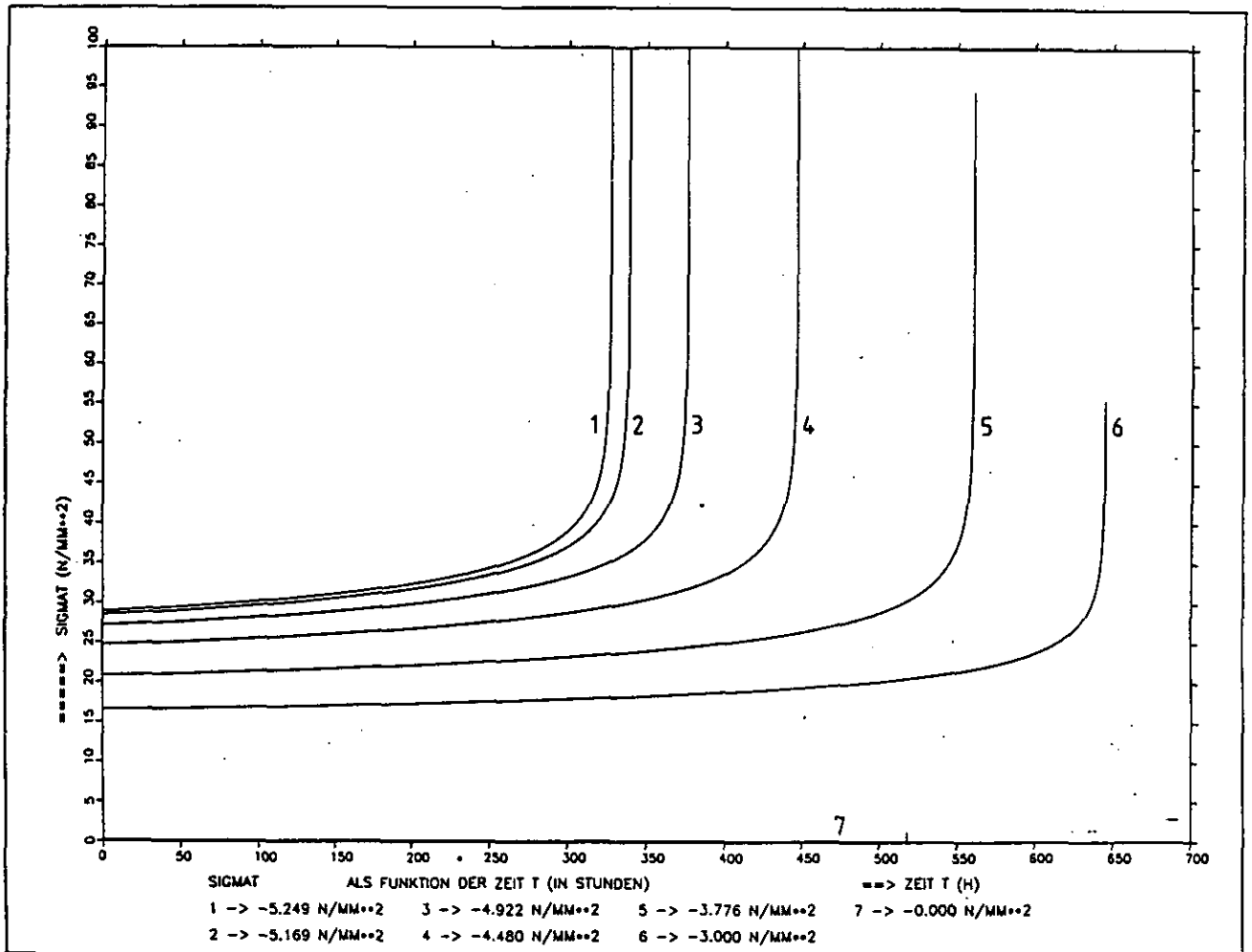


Abb. 17: Tangentialspannung in der als dünne Membran aufgefaßten Rohrwandung als Funktion der Zeit (Näherungsverfahren), vergleiche Abb. 9 und 10.

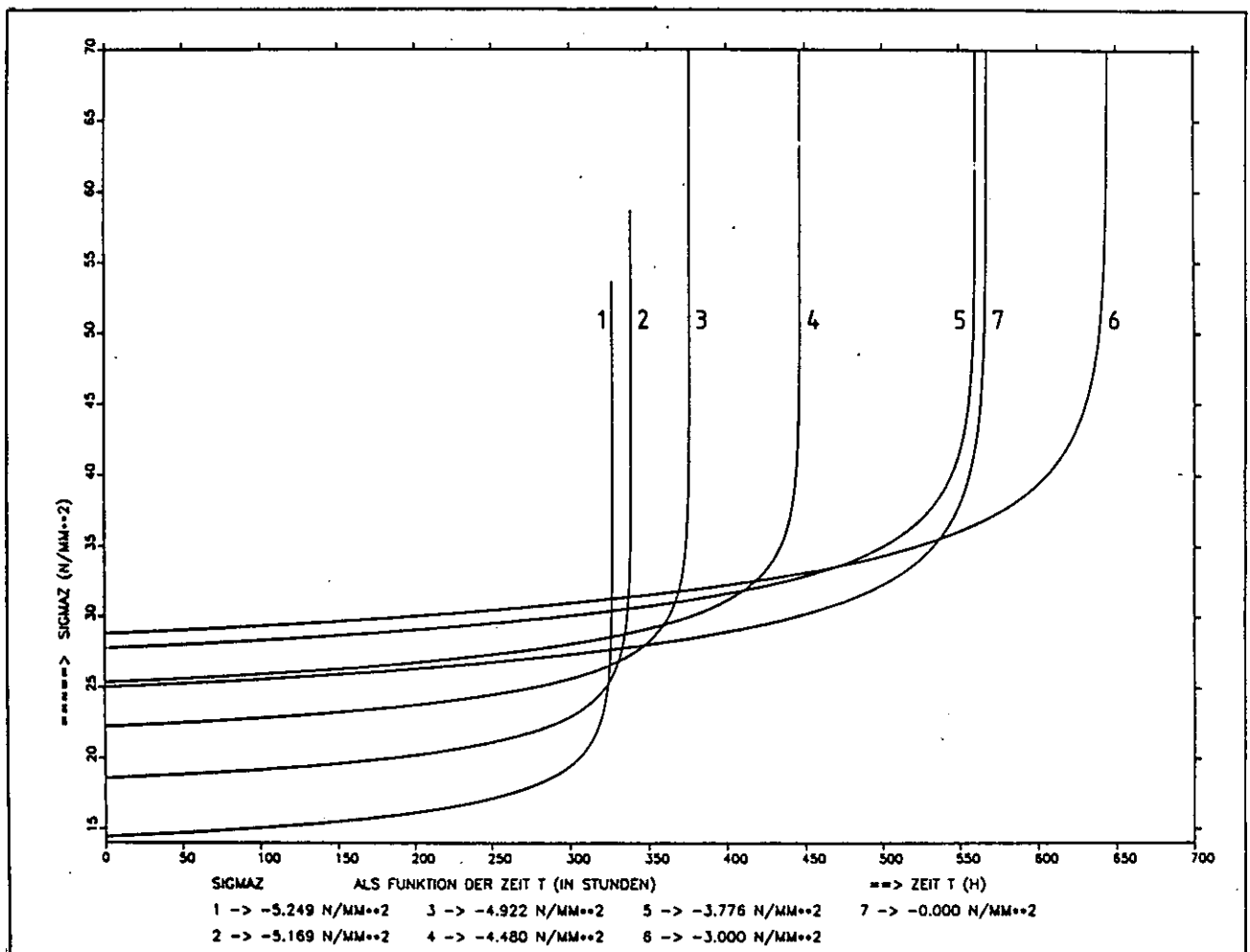


Abb. 18: Axialspannung in der als dünne Membran aufgefaßten Rohrwandung als Funktion der Zeit (Näherungsverfahren), vergl. Abb. 11 und 12.

Rechenfall (Δp [bar])	Berechnungs- methode Diskretisierung	Exaktes kontinuums- mechanisches Verfahren					Näherungsverfahren				
							EULER-CAUCHY - Vorwärts-Verfahren		RUNGE-KUTTA - Verfahren		ana- lytisch
		Zeitschrittparameter δ				ana- lytisch	Z.-Parameter δ		Z.-Parameter δ^*		
		0,00025	0,0005	0,001	0,01		0,001	0,01	0,001	0,01	
1 (5,249)		—	334,96	336,35	362,14	333,40	329,52	355,16	326,75	327,25	327,1
2 (5,169)		—	347,03	348,31	371,96	—	341,13	364,71	338,66	339,14	—
3 (4,922)		—	384,88	386,09	408,30	—	378,07	400,23	375,71	376,23	—
4 (4,480)		—	456,75	457,91	479,13	—	448,38	469,70	446,19	446,79	—
5 (3,776)		—	571,64	572,76	593,27	—	561,85	582,66	559,68	560,43	—
6 (3,000)		—	654,72	655,87	676,91	—	646,08	667,81	643,83	644,87	—
7 (0,000)		568,44	569,55	571,77	612,89	566,90	571,62	613,18	567,17	567,60	566,90

* Berechnung des Zeitinkrements Δt aus δ wie beim EULER-CAUCHY-Verfahren. Allerdings charakterisiert δ jetzt nicht mehr exakt die Wandstärkenabnahme von Zeitpunkt zu Zeitpunkt wie in den anderen Spalten der Tabelle.

Tabelle II: Zusammenstellung der mit unterschiedlichen Methoden und Diskretisierungsgraden berechneten Versagenszeiten (h) der 7 Rechenfälle nach Tabelle I.